Chap 2 - Algèbre linéaire

1. Rappels

On note K un corps qcq ($K = \mathbb{K}$ si on veut)

- Étant donnée $(x_i)_{i\in I}$ famille de vecteurs de E (I ensemble quelconque), on appelle combinaison linéaire des x_i toute expression du type $\sum_{i\in J} \lambda_i x_i$ où $J \subset I$ partie finie, et $(\lambda_i)_{i\in J}$ famille de scalaires. On note parfois une telle combinaison linéaire $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, avec la convention (tacite ?) que les λ_i sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux — on dit alors que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est à support fini et l'on note $I_0 = \{i \in I \ ; \ \lambda_i \neq 0\}$ le support de $(x_i)_{i\in J}$
- La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite libre, ou linéairement indépendante, si pour toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in J}$ à support fini on a l'implication
$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \implies \forall i \in I \quad \lambda_i = 0.$$
- La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite génératrice de E si tout $x \in E$ est combinaison linéaire des x_i, ie s'il existe $(\lambda_i)_{i\in I}$ à support fini telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.
- On appelle base de E toute famille $(x_i)_{i\in I}$ à la fois libre et génératrice (et telle que I soit muni d'un ordre total ...)
- On admet que tout K-ev admet (au moins) une base.

Remarques :

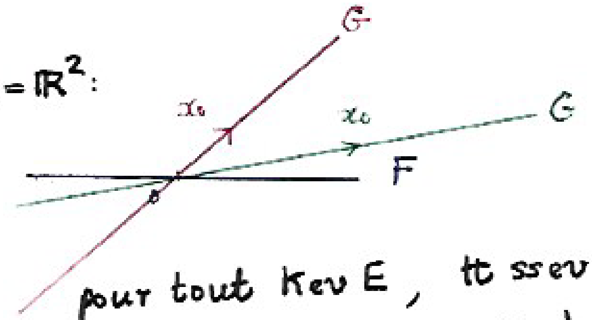
1) Lorsque I est fini, se donner une famille à support fini revient à se donner une famille (tout court) indexée par I (quitte à compléter par des 0 une éventuelle famille indexée par $I_0 \subset I$)
2) Lorsque $I = \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$ ...), se donner une famille à support fini (indexée par $\mathbb{N}$) revient à se donner un entier $n \in \mathbb{N}$

- Soit E un K-ev, F un ssev de E, G un ssev de E.
On dit que G est un supplémentaire de F si $E = F \oplus G$

pas unicité !

Par ex, si F = hyperplan, $G = \mathrm{Vect}(x_0)$ est un supplémentaire de F pour N'IMPORTE QUEL $x_0 \notin F$...

dessin si $E = \mathbb{R}^2$:



On admet que, pour tout Kev E, tt ssev F de E admet (au moins) un supplémentaire (prouvé si E de dim. finie)

- Soit $E_1, \dots, E_p$ des K ev, on note $E = \prod_{k=1}^{p} E_k = E_1 \times \dots \times E_p$ le K-ev de E : somme produit des E_k ; $k = 1, \dots, p$. Structure de et produit (par un scalaire) composante par composante ; ie si $x = (x_1, \dots, x_p)$ et $y = (y_1, \dots, y_p) \in E$, $\lambda \in K$ on a :

$$\lambda x + y := (\lambda x_k + y_k)_{1 \leq k \leq p}$$

Supposons que $E_1, \dots, E_p$ soient de dim. finie et soit $\mathcal{B}_k = (e_{k,1}, \dots, e_{k,n_k})$ une base de E_k. Notons pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et tout $i \in [\![1, n_k]\!]$ $\varepsilon_{k,i}$ le vecteur de E défini par $\varepsilon_{k,i} = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ k^e \text{ composante}}}{e_{k,i}}, 0, \dots, 0)$

Alors la famille $(\varepsilon_{k,i})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq i \leq n_k}}$ est une base de E

→ liberté facile
→ génératrice car si $x = (x_1, \dots, x_p)$ et si chaque $x_k = \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_{k,i} e_{k,i}$

alors $x = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots 0) + (0, \dots, 0, x_p)$
$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n_k} \lambda_{k,i} \varepsilon_{k,i} \right)$ → comb. lin. des $\varepsilon_{k,i}$ ok !

Variante de notation : avec I ensemble fini (au lieu de $[\![1, p]\!]$), $(E_i)_{i \in I}$ famille de Kev, $E = \prod_{i \in I} E_i$ (chaque $x \in E$ se note $x = (x_i)_{i \in I}$ et peut être vu comme une application $\begin{pmatrix} I \to \bigcup_{i \in I} E_i \\ i \mapsto x_i \end{pmatrix}$ telle que $\forall i \in I$ $x_i \in E_i$)

et une famille indexée par $[\![0,n]\!]$ (ou $[\![1,n]\!]$)

$\hookrightarrow$ la combinaison linéaire correspondante $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$

En effet toute partie finie de $\mathbb{N}$, I_0, est incluse dans un $[\![0,n]\!]$ (n assez grand)

<u>Ex</u>: Dans $E = \mathbb{K}[X]$, $I = \mathbb{N}$, $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la base canonique

$\hookrightarrow$ tout polynôme P peut s'écrire

$$P = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n X^n}_{\substack{\text{au sens où} \\ (\alpha_n) \text{ famille} \\ \text{à support fini}}} \underset{\substack{\text{cf} \\ \text{remarque 2}}}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$$

. Etant donnée $(x_i)_{i\in I}$ famille (quelconque), on note

$\mathrm{Vect}(x_i : i\in I)$ l'espace engendré par les x_i = ensemble de toutes les combinaisons linéaires de x_i, ie

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(x_i : i\in I) &= \{x\in E \,;\, \exists (\lambda_i)_{i\in I} \text{ à support fini tq } x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i\} \\ &= \{x\in E \,;\, \exists I_0 \subset I \text{ finie } \& \ \exists (\lambda_i)_{i\in I_0} \in \mathbb{K}^{I_0} \\ &\qquad \text{tq } x = \sum_{i\in I_0} \lambda_i x_i\}\end{aligned}$$

Bien sûr, si I finie on a

$$\mathrm{Vect}(x_i : i\in I) = \{x\in E \,;\, \exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \text{ tq } x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i\}$$

en effet: $\subset$ soit I_0 le support de $(\lambda_i)_{i\in I}$; posons

$$\mu_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i\in I_0 \\ 0 & \text{si } i\notin I_0 \end{cases} \quad \text{ainsi } (\mu_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \text{ et}$$

$$\sum_{i\in I_0} \lambda_i x_i = \sum_{i\in I} \mu_i x_i$$

$\supset$ si $(\lambda_i)_{i\in I}$ famille de $\mathbb{K}$, c'est une famille à support fini car I finie ...

Remarque 3: Comme dans rem 2, si $I = \mathbb{N}$, une combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ peut toujours s'écrire $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$

— pas la peine de passer par une partie finie de $\mathbb{N}$...

Ex: un polynôme P peut se noter $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ (au lieu de $P = \sum_{k\in I_0} \alpha_k X^k$, $I_0 \subset \mathbb{N}$ partie finie ... c'est lourd !)

2. Sommes de ss-ev

Partout : . E, F, G ... désignent des K-ev.

. K = corps (commutatif ...)

. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ → cas suffisant en pratique

2.1. Définitions

Soient : . $p \in \mathbb{N}$

. E un K-ev

. $E_1, \dots, E_p$ des ssev de E.

On note

$$\Psi : \left(\begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_p & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} x_i \end{array} \right)$$

Exo : Montrer que Ψ est une application linéaire (facile avec le rappel sur la structure de $E_1 \times \dots \times E_p$ de K-ev)

Déf 1 :

① On note $\sum_{i=1}^{p} E_i$ ou $E_1 + \dots + E_p$ l'image de Ψ ie :

$$\sum_{i=1}^{p} E_i = E_1 + \dots + E_p = \{ x \in E ; \exists (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p \text{ tq } x = x_1 + \dots + x_p \}$$

② Les E_i sont dits en somme directe (noté « les E_i en $\oplus$ ») lorsque Ψ est injective

③ On a $E = \sum_{i=1}^{p} E_i$ lorsque Ψ surjective

④ On note $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ lorsque Ψ isomorphisme

↳ parfois on dit que les E_i sont supplémentaires

Rem : Variante de notation "famille" : I ensemble fini, $(E_i)_{i \in I}$ famille de ssev ; $\Psi : \prod_{i \in I} E_i \to E$, $(x_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} x_i$; on note alors $\sum_{i \in I} E_i = \operatorname{Im} \Psi$ et $\bigoplus_{i \in I} E_i$ si Ψ isomorphisme.

Les deux notations sont redondantes puisque si I est fini, I est en bijection avec $[\![1,p]\!]$ pour un $p\in\mathbb{N}$: si on note $\varphi : \begin{pmatrix} I \to [\![1,p]\!] \\ i \mapsto \varphi(i) \end{pmatrix}$ une bijection et ψ sa réciproque et si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille de ss ev de E alors en notant pour tout $k\in[\![1,p]\!]$ $F_k = E_{\psi(k)}$, les E_i sont en $\oplus \Leftrightarrow$ les F_k le sont, $\sum_{i\in I} E_i = \sum_{k=1}^{p} F_k$, etc... on peut ainsi passer librement d'une notation à l'autre.

En pratique :

(1) Les E_i sont en $\oplus \Longleftrightarrow$ pour tous $x_1,\dots,x_p$ (avec $\forall i$ $x_i\in E_i$) tels que $x_1+\dots+x_p=0$, on a $\forall i$ $x_i=0$

$\hookrightarrow$ Pour prouver que les E_i en $\oplus$ écrire « Soient $x_1,\dots,x_p$ tels que $\forall i=1,\dots,p$ $x_i\in E_i$ supposons que $x_1+\dots+x_p=0$ et montrons que les x_i sont tous nuls ... etc »

(2) $E=\bigoplus_{k=1}^{p} E_k \Longleftrightarrow \forall x\in E$ $\exists!\,(x_1,\dots,x_p)\in E_1\times\dots\times E_p$ tq $x=x_1+\dots+x_p$

$\hookrightarrow$ peut se faire par analyse - synthèse ...

Déf 2 (Projecteurs associés à une décomposition)

Soient
- E $\mathbb{K}$ev
- $E_1,\dots,E_p$ ss ev de E ($p\in\mathbb{N}$)

Supposons (hyp) $E=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ $(*)$

Pour $x=x_1+\dots+x_p$ dans E, on note $\pi_i(x)=x_i$

π_i = projecteur sur E_i associé à la décomposition $(*)$

On a donc $\forall x\in E$ $x=\sum_{i=1}^{p}\pi_i(x)$, soit : $\sum_{i=1}^{p}\pi_i = id_E$.

Prop 1 : $\mathcal{M}$ E, E_i, π_i

① Chaque π_i est un endomorphisme

② Les π_i sont des projecteurs, plus précisément π_i est le projecteur sur E_i parallèlement à $F_i = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} E_j$ (en admettant temporairement que les E_j, $j \neq i$, sont en $\oplus$ ..)

Preuve :

① Pour $x = x_1 + \dots + x_p$, $y = y_1 + \dots + y_p$ dans E et $\lambda \in K$ on écrit $\lambda x + y = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{(\lambda x_i + y_i)}_{\in E_i}$ donc $\pi_i(\lambda x + y) = \lambda x_i + y_i = \lambda \pi_i(x) + \pi_i(y)$

② Pour $x = x_1 + \dots + x_p$, on écrit $x = \underbrace{x_i}_{\in E_i} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} x_j}_{\in F_i} \in E_i \oplus F_i$

Prop 2 (cas particulier $p=2$)

La déf 1 dans le cas $p=2$ est cohérente avec celle vue en 1ère année i.e.

① ψ est injective $\Leftrightarrow$ $E_1 \cap E_2 = \{0\}$

② ψ surjective $\Leftrightarrow$ $E_1 + E_2 = E$

③ $\underbrace{E_1 \oplus E_2 = E}_{\text{au sens de la déf 1}}$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont supplémentaires}}_{\text{au sens du cours de MP2I}}$

Preuve :

① $\Rightarrow$ Soit $x \in E_1 \cap E_2$. Mq $x = 0$.

Prenons $x_1 = x$ & $x_2 = -x$. on a $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $(x_1, x_2) \in \ker \psi$ puisque $\psi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = x - x = 0$. D'où $(x_1, x_2) = (0,0)$ par injectivité de ψ. ok !

$\Leftarrow$ Soit $x = (x_1, x_2) \in \ker \psi$. Mq $x = 0$.

On a $\psi(x) = x_1 + x_2 = 0$ d'où $\underbrace{x_1}_{\in E_1} = \underbrace{-x_2}_{\in E_2}$. Posons $x = x_1$;

on a $x \in E_1$ et $x = -x_2 \in E_2$ d'où $x \in E_1 \cap E_2$.

D'où $x = 0$ et donc $x_1 = x = -x_2 = 0$. ok !

② Par déf ψ surjective $\Leftrightarrow$ tout $x \in E$ peut s'écrire $x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2}$ ce qui est la déf de $E = E_1 + E_2$ vue en sup.

③ comme en ②.

2.2. Propriétés & caractérisations.

Prop 3 [sur-sous-familles]

Soit I fini et pour tout $i \in I$ E_i = ssev de E

① [Sous famille]

Supposons (hyp) les E_i en $\oplus$

Alors (cl) pour toute $J \subset I$ $(E_j)_{j\in J}$ est en $\oplus$

② [Sur famille]

Supp (hyp) $E = \sum_{i \in I} E_i$

Alors (cl) pour toute J tel que $I \subset J$ et toute famille $(F_j)_{j\in J}$ de ssev de E tq $\forall i \in I$ $F_i = E_i$, on a

$$E = \sum_{j\in J} F_j$$

Preuve :

① Soit $(x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} E_j$ tq $\sum_{j\in J} x_j = 0$. Posons pour $i \in I \setminus J$ $\tilde{x}_i = 0$ et pour $j \in J$ $\tilde{x}_j = x_j$: Les $\tilde{x}_i$ vérifient $\sum_{i\in I} \tilde{x}_i = 0$ donc $\forall i$ $\tilde{x}_i = 0$ d'où $\forall j \in J$ $x_j = 0$.

② Soit $x \in E$; il existe $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ tq $x = \sum_{i\in I} x_i$.

Posons pour $j \in J$ $y_j = \begin{cases} x_i & \text{si } j = i \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ On a toujours $x = \sum_{j\in J} y_j$

donc $E = \sum_{j\in J} F_j$.

Prop4 [lien $\sum E_i$ / familles de vecteurs]

Soient
- E un K-ev
- $e_1, \dots, e_p \in E$ $(p \in \mathbb{N})$
- $E_i := \mathrm{Vect}(e_i) = Ke_i$ (droite engendrée par e_i)

① $(e_i)_{1\le i\le p}$ génératrice $\Leftrightarrow E_1 + \dots + E_p = E$

② Supp (hyp) $\forall i \in [\![1,p]\!]$ $e_i \neq 0$

Alors $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ libre $\Leftrightarrow$ les E_i sont en $\oplus$.

③ Sous la même Hyp que les e_i sont $\neq 0$: $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ base de E $\Leftrightarrow$ les E_i sont supplémentaires dans E

Preuve :

① $\Rightarrow$: Soit $x\in E$. On a $x = \underbrace{\lambda_1 e_1}_{\in E_1} + \cdots + \underbrace{\lambda_p e_p}_{\in E_p}$ car (e_i) génératrice

d'où les E_i ont E pour somme.

$\Leftarrow$: Soit $x\in E$. On peut écrire $x = x_1 + \cdots + x_p$ où $\forall i\ x_i \in E_i$

Or $E_i = Ke_i$, donc $x_i = \lambda_i e_i$ pour un $\lambda_i \in K$. D'où $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$

② $\Rightarrow$: Soient $x_1, \dots, x_p$ tq $\forall i\ x_i \in E_i$ & $x_1 + \cdots + x_p = 0$. Mq $x_i = 0$ pour tout i.

Or $x_i = \lambda_i e_i$ pour un $\lambda_i \in K$, d'où $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0$, d'où $\forall i\ \lambda_i = 0$ par liberté des e_i, d'où $x_i = 0$. ok !

$\Leftarrow$: Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ tq $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0$. Chaque $\lambda_i e_i = x_i \in E_i$ donc par $\oplus$ $\forall i\ x_i = 0$ d'où $\lambda_i e_i = 0$. L'hyp $e_i \neq 0$ assure que chaque $\lambda_i = 0$, d'où la liberté

cqfd.

↓ faux sans cette hyp !

Prop 5 : [Caractérisation en dim finie de la $\oplus$]

Soient
- E un Kev
- $E_1, \dots, E_p$ des ss ev

Supp (hyp) $\forall i$ E_i de dim finie

Alors (Cl₁) $\sum_{i=1}^p E_i$ est de dim finie avec

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p E_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim E_i \quad (*)$$

(Cl₂) On a égalité dans $(*)$ $\Leftrightarrow$ les E_i sont en $\oplus$

Preuve :

1) $\Psi : E_1 \times \cdots \times E_p \to E$ est de source $E_1 \times \cdots \times E_p$ de dim finie donc son image $\mathrm{Im}\,\Psi = \sum_{i=1}^p E_i$ est de dim finie ; de plus la dim. de $\mathrm{Im}\,\Psi$ est $\leq$ dim. de la source, qui vaut $\sum_{i=1}^p \dim E_i$.

2) On a = dans $(*)$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\,\Psi = \dim(E_1 \times \cdots \times E_p)$

$\Leftrightarrow$ $\ker \Psi = \{0\}$ par thm du rang. cqfd

Prop 6 : (Recollement des bases)

$\hat{M}$ $E, E_1, \dots, E_p$

Supp (hyp) les E_i de dim finie $\longleftrightarrow$ hyp en fait inutile mais bon...

Soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_i, $\mathcal{B}$ le recollement des $\mathcal{B}_i$

Alors on a les équivalences

① Les E_i en $\oplus$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ libre

② $E = \sum_{i=1}^{p} E_i \Leftrightarrow \mathcal{B}$ génératrice de E

③ $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i \Leftrightarrow \mathcal{B}$ base de E

Preuve. Notons $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,n_i})$ où $n_i = \dim E_i$.

① $\Rightarrow$ Soient $\lambda_{i,k}$ où $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq k \leq n_i$ des scalaires tq

$\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_{i,k} e_{i,k} = 0$. Mq $\forall i,k \ \lambda_{i,k} = 0$.

On pose $x_i = \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_{i,k} e_{i,k}$: $x_i \in E_i$ et par hyp $x_1 + \dots + x_p = 0$

Donc $\forall i \ x_i = 0$ par hyp de $\oplus$ des E_i, d'où à i fixé $\sum_{k=1}^{n_i} \lambda_{i,k} e_{i,k} = 0$

Puis par liberté de $\mathcal{B}_i$ on a $\forall k \ \lambda_{i,k} = 0$ ok !

$\Leftarrow$ Soient $x_1, \dots, x_p$ tq $x_i \in E_i$ et $x_1 + \dots + x_p = 0$. Mq $x_i = 0$

Or chaque x_i s'écrit $x_i = \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_{i,k} e_{i,k}$ car $\mathcal{B}_i$ base, donc

$\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_{i,k} e_{i,k} = 0$ d'où $\forall i,k \ \lambda_{i,k} = 0$ d'où

$\forall i \ x_i = 0$ ok.

② $\Rightarrow$ Soit $x \in E$. On peut écrire $x = x_1 + \dots + x_p$ par hyp, chaque x_i est comb. lin. des $e_{i,k}$, donc x aussi.

$\Leftarrow$ Soit $x \in E$. On peut écrire $x = \sum_{i,k} \lambda_{i,k} e_{i,k}$ par hyp

donc en posant $x_i = \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_{i,k} e_{i,k}$ on a $x_i \in E_i$ et

$x = x_1 + \dots + x_p$. D'où ok !

③ c'est ① & ② ...

Prop 7: (Caractérisation supplémentarité en dim finie)

Soient . E $\mathbb{K}$ev

. $E_1, \dots, E_p$ ssev

Supp (hyp) E de dim finie

Alors équivalence:

(i) $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

(ii) $E = \sum_{i=1}^{p} E_i$ et $\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$

(iii) les E_i sont en $\oplus$ et $\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$

Remarque: en pratique souvent (iii) $\Rightarrow$ (i) est utilisé

Preuve: Notons $\Psi \begin{pmatrix} E_1 \times \dots \times E_p \longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_p) \longrightarrow x_1 + \dots + x_p \end{pmatrix}$

(i) dit : Ψ isomorphisme

(ii) dit Ψ surjective & dim source = dim but

(iii) dit Ψ injective & " " " "

Le cours de MP2I dit OK !

Prop 8 (thm de prolongement des applications linéaires à une somme directe)

Soient . E, F $\mathbb{K}$-ev

. $E_1, \dots, E_p$ ss-ev de E

. $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ $(i = 1, \dots, p)$

Supp (hyp) $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

Alors (cl) il existe une et une seule $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tq $u_{|E_i} = u_i$ (ie il existe exactement un prolongement des u_i à E entier)

Preuve : par analyse synthèse

. ANALYSE Admettons l'existence d'une telle $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour $x = x_1 + \dots + x_p$ dans E, avec $x_i \in E_i$ pour tout $i = 1, \dots, p$, on a donc nécessairement

$$u(x) = u(x_1 + \dots + x_p) = u(x_1) + u(x_2) + \dots + u(x_p) \quad \text{car } u \text{ linéaire}$$
$$= \underbrace{u_1(x_1) + u_2(x_2) + \dots + u_p(x_p)} \quad \text{car } u_{|E_i} = u_i \text{ et } x_i \in E_i$$

ceci est une expression de u en fonction des u_i

(en fait $u = u_1 \circ \pi_1 + u_2 \circ \pi_2 + \dots + u_p \circ \pi_p$)

ainsi u est entièrement déterminée par les u_i

. SYNTHÈSE Posons (1) $u(x) = u_1(x_1) + \dots + u_p(x_p)$ pour $x = x_1 + \dots + x_p$ $(x_i \in E_i)$, ou encore (2) $u = u_1 \circ \pi_1 + \dots + u_p \circ \pi_p$ vu que par déf des π_i on a $x_i = \pi_i(x)$

par (2) il est clair que u est linéaire car les u_i et les π_i le sont

par (1) prenons $x \in E_i$, ie $x = x_1 + \dots + x_p$ où les x_j sont $= 0$ pour $j \neq i$ et $x_i = x$; on a alors $u(x) = u_1(0) + \dots + u_i(x_i) + \dots + u_p(0)$
$= u_i(x_i)$
$= u_i(x)$

d'où $u_{|E_i} = u_i$. CQFD

Remarques

① Considérons l'application Φ $\mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \prod_{i=1}^{p} \mathcal{L}(E_i, F)$

$u \longmapsto (u_{|E_i})_{1 \leq i \leq p}$

(ie $\Phi(u)$ est le p-uplet des restrictions de u aux E_i)

On a la reformulation suivante de prop 8

Prop 8bis : . Même notations

Supp (hyp) $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

Alors (a) Φ est un isomorphisme de Kev

② Soit . $\mathcal{B}_F$ base de F

. $\mathcal{B}_i$ $(1 \leq i \leq p)$ base de E_i, $\mathcal{B}_E$ le recollement des E_i

(dans l'hyp. que E et F sont de dim finie bien sûr, et que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ pour assurer le terme "recollement")

Notons $M_i = \mathrm{Mat}(u_i\,;\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_F)$ pour $i=1,\dots,p$, où $u_i \in \mathcal{L}(E_i,F)$

Alors $\underset{\text{"la" u de prop 8}}{\mathrm{Mat}(u;\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)} = \big[M_1 | M_2 | \dots | M_p\big]$

matrice "concaténation" de $M_1, M_2, \dots, M_p$ dans cet ordre

③ Plus généralement, si l'hyp $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ est affaiblie

en (hyp' les E_i sont en somme directe (resp. ~~en $E = E_1 + \dots + E_p$~~)

(resp. en (hyp'' $E = E_1 + E_2 + \dots + E_p$))

alors (cl' Φ est surjective (resp. (cl'' Φ est injective)

peut être utile, surtout avec (hyp'' qui est un thm de caractérisation

En effet • sous (hyp') soit $E' = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ (correctement) et E'' un supplémentaire de E' : $E = E' \oplus E''$; soit $u_i \in \mathcal{L}(E_i,F)$

On applique la prop 8 d'abord aux u_i : on obtient $u' \in \mathcal{L}(E',F)$ tq $u'_{|E_i} = u_i$. Ensuite, on applique encore prop 8,

on a bien prolongé les u_i à E entier :)

cette fois avec $u' \in \mathcal{L}(E',F)$ et avec $u'' = 0 \in \mathcal{L}(E'',F)$, on obtient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tq $u_{|E'} = u'$ (et donc $u_{|E_i} = u_i$) et $u_{|E''} = 0$ (on s'en fout en fait ... c'est juste pour prolonger à E...)

• sous (hyp'') soit $u \in \mathrm{Ker}\,\Phi$, ie u tq $u_{|E_i} = 0$ pour tout i.

mq $u = 0$. Or si $x \in E$, on a $x = x_1 + \dots + x_p$ avec $x_i \in E_i$ (pas unique) et donc

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1) + \dots + u(x_p) \\ &= u_1(x_1) + \dots + u_p(x_p) \quad \text{car } u_{|E_i} = u_i \\ &= 0 + \dots + 0 \end{aligned}$$

3. Calcul matriciel par blocs

3.1. Définitions

Cadre :
- $n, m \in \mathbb{N}^*$
- $r, s \in \mathbb{N}^*$
- $n_1, n_2, \dots, n_r$ et $m_1, m_2, \dots, m_s$ dans $\mathbb{N}^*$ tq $n_1+\dots+n_r = n$ et $m_1+\dots+m_s = m$
- Pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,s]\!]$ soit $A_{i,j} \in M_{n_i,m_j}(K)$

Notation & vocabulaire :
- On définit alors $A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r,1} & A_{r,2} & \cdots & A_{r,s} \end{bmatrix} \in M_{n,m}(K)$

  (on prend soin d'enlever les crochets de chaque $A_{i,j}$ et ne laisser que les "grands" crochets extérieurs)

  La matrice A ainsi définie est dite décomposée en blocs $r \times s$
- Réciproquement toute matrice $A \in M_{n,m}(K)$ peut être, et de manière unique, décomposée en blocs $r \times s$ (en regroupant ses coefficients en matrices $n_i \times m_j$)

Dans le cas $r=s$ (ie "carré par blocs"), A est dite
- triangulaire supérieure (resp. inf.) par blocs si $\forall i,j \in [\![1,r]\!] \times [\![1,s]\!]$ $i > j \Rightarrow A_{i,j} = 0$ (resp. $i < j \Rightarrow A_{i,j} = 0$)
- diagonale par blocs si à la fois triang. sup. & inf.

Interprétation géométrique des blocs
- Soient E, F deux K-ev de dim. m et n resp.
- Supp que $n = n_1 + \dots + n_r$ et $m = m_1 + \dots + m_r$
- Soient $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ bases de E & F resp.
- On note $N_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$ pour $1 \leq i \leq r$ et $M_j = \sum_{k=1}^{j} m_k$ pour $1 \leq k \leq s$

ainsi que $\mathcal{B}_{E,j} = (e_{M_{j-1}+1}, e_{M_{j-1}+2}, \dots, e_{M_j})$ pour $1 \leq r \leq s$

et $\mathcal{B}_{F,i} = (\varepsilon_{N_{i-1}+1}, \varepsilon_{N_{i-1}+2}, \dots, \varepsilon_{N_i})$ pour $1 \leq i \leq r$

. On note aussi $E_j = \text{Vect}\, \mathcal{B}_{E,j}$ et $F_i = \text{Vect}\, \mathcal{B}_{F,i}$ de sorte que, par recollement des bases, on ait $E = \bigoplus_{j=1}^{s} E_j$ et $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$

. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = \text{Mat}(u ; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$

Par définition de la matrice d'une appl. lin. dans des bases on peut écrire

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,s} \\ \vdots & & & \\ A_{r,1} & A_{r,2} & \cdots & A_{r,s} \end{bmatrix}$$

où :

- pour tout $j \in [\![1,s]\!]$ $\begin{bmatrix} A_{1,j} \\ A_{2,j} \\ \vdots \\ A_{r,j} \end{bmatrix}$ est la matrice de la restriction de u à E_j dans les bases $\mathcal{B}_{E,j}$ et $\mathcal{B}_F$: $\begin{bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{rj} \end{bmatrix} = \text{Mat}(u_{|E_j} ; \mathcal{B}_{E,j}, \mathcal{B}_F)$

- pour tous $i,j \in [\![1,r]\!] \times [\![1,s]\!]$, $A_{i,j}$ est la matrice de $\pi_i \circ u_{|E_j}$ dans les bases $\mathcal{B}_{E,j}$ et $\mathcal{B}_{F,i}$ (π_i est le projecteur sur F_i associé à la décomposition $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_r$). ie

$$A_{i,j} = \text{Mat}(\pi_i \circ u_{|E_j} ; \mathcal{B}_{E,j}, \mathcal{B}_{F,i})$$

Remarque Dans le contexte $u \in \mathcal{L}(E,F)$ où $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_s$ & $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ il est plus naturel de passer en double indexation pour les bases, ie de noter $\mathcal{B}_{E,j} = (e_{j,1}, e_{j,2}, \dots, e_{j,m_j})$ une base de E_j

$\mathcal{B}_{F,i} = (\varepsilon_{i,1}, \varepsilon_{i,2}, \dots, \varepsilon_{i,n_i})$ —— F_i

$$A_{i,j} = \text{Mat}(\pi_i \circ u_{|E_j} ; \mathcal{B}_{E,j}, \mathcal{B}_{F,i})$$

de sorte que

$$\text{Mat}(\underbrace{u ; \mathcal{B}_E}_{\text{recollement des } \mathcal{B}_{E,j}}, \underbrace{\mathcal{B}_F}_{\text{recollement des } \mathcal{B}_{F,i}}) = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,s} \\ \vdots & & \\ A_{r,1} & \cdots & A_{r,s} \end{bmatrix}$$

3.2. Propriétés

Prop 9 : Soient . $n = n_1 + \cdots + n_r$, $m = m_1 + \cdots + m_s$ ($r, s \geq 1$)

. $A = [A_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}}$ $\quad B = [B_{i,j}]_{i,j}$ décomposées en blocs

Alors $\quad \lambda A + \mu B = [\lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}}$ $\quad (\lambda, \mu \in K)$

Preuve : évident visuellement ; facile à formaliser avec l'interprétation géométrique du §3.1. en introduisant u et v tels que $A = Mat(u; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ & $B = Mat(v; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ et $\lambda u + \mu v$.

Prop 10 : Soient . $n = n_1 + \cdots + n_r$, $m = m_1 + \cdots + m_s$, $p = p_1 + \cdots + p_t$

. $A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \\ A_{r,1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_s \\ \vdots & & \\ B_{s1} & & B_{s,t} \end{bmatrix}$

où $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, m_j}(K)$, $B_{i,j} \in \mathcal{M}_{m_i, p_j}(K)$

On a alors la décomposition par blocs suivante

$$A.B = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1,t} \\ C_{r,1} & \cdots & C_{r,t} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \text{pour tout } (i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,t]\!]$$

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{s} A_{i,k} B_{k,j}$$

Preuve : . évident visuellement, par associativité de la somme dans K. (ce que l'on peut formaliser en comparant

$$[AB]_{N_i + i', P_j + j'} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{s} [A_{i,k} B_{k,j}]_{i',j'} \quad)$$

. Géométriquement, soient E, F, G des kev de dim p, m, n resp tq $E = \bigoplus_{j=1}^{t} E_j$, $F = \bigoplus_{k=1}^{s} F_k$, $G = \bigoplus_{i=1}^{r} G_i$; on fixe des bases $(e_{j,j'})_{1 \leq j' \leq p_j}$ de E_j , $(f_{k,k'})_{1 \leq k' \leq m_k}$ de F_k , $(g_{i,i'})_{1 \leq i' \leq n_i}$ de G_i

et on note $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ leur recollement ; on se donne u (resp v) tq $Mat(u; \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) = A$ (resp. $Mat(v; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = B$)

et on explicite pour $1 \leq j \leq t$ et $1 \leq j' \leq p_j = \dim E_j$

$$u\circ v(e_{j,j'}) = u(v(e_{j,j'}))$$

$$= u\Big(\sum_{k=1}^{t}\sum_{k'=1}^{m_k} [B_{k,j}]_{k',j'}\, f_{k,k'}\Big) \quad \text{déf. de } B$$

$$= \sum_{k=1}^{t}\sum_{k'=1}^{m_k} [B_{k,j}]_{k',j'}\, u(f_{k,k'}) \quad \text{car } u \text{ linéaire}$$

$$= \sum_{k}\sum_{k'} [B_{k,j}]_{k',j'} \sum_{i=1}^{r}\sum_{i'=1}^{n_i} [A_{i,k}]_{i',k'}\, g_{i,i'}$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{i'=1}^{n_i} \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{s}}_{\text{se rentre dans}} \underbrace{\sum_{k'=1}^{m_k} [B_{k,j}]_{k',j'} \cdot [A_{i,k}]_{i',k'}}_{=[A_{i,k}\cdot B_{k,j}]_{i',j'}}\Big) g_{i,i'}$$

et donc

$$u\circ v(e_{j,j'}) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{i'=1}^{n_i} [C_{i,j}]_{i',j'}\, g_{i,i'} \quad \text{comme souhaité. CQFD}$$

Ex : Soit $A = [a_{i,j}] \in M_n(K)$ et notons $M = \begin{bmatrix} a_{11} I_p & \cdots & a_{1n} I_p \\ \vdots & & \\ a_{n,1} I_p & \cdots & a_{n,n} I_p \end{bmatrix}$

définie décomposée en blocs de taille p.

Si $A' = [a'_{i,j}] \in M_n(K)$ et $M' = [a'_{ij} I_p]$ par blocs, alors

on a $AA' = [b_{i,j} I_p]$ où $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a'_{k,j}$, et donc si

$A \in GL_n(k)$ alors $M \in GL_{np}(K)$ avec $M^{-1} = M'$ comme ci dessus, en prenant $A' = A^{-1}$ = inverse de A.

Cor ① Lorsque $r=s=t$, si $A = \begin{bmatrix} A_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{rr} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} B_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{r,r} \end{bmatrix}$

sont triang sup. par blocs, alors

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{rr}B_{r,r} \end{bmatrix} \quad \text{(aussi triang. sup. blocs)}$$

② Si de plus les $A_{i,i}$ sont carrées (et donc A aussi...)

on a $$A^k = \begin{bmatrix} A_{11}^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{r,r}^k \end{bmatrix}$$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

③ Si A est diagonale par blocs, $A = \begin{bmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_r \end{bmatrix}$

on a $A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,r]\!] \quad D_i \in GL_{n_i}(K)$

auquel cas $$A^{-1} = \begin{bmatrix} D_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_r^{-1} \end{bmatrix}$$

Preuve : . ①&② sont immédiats

. ③ $\Rightarrow$ en notant $A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \\ B_{r1} & \cdots & B_{rr} \end{bmatrix}$ on a

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} D_1 B_{11} & \cdots & D_1 B_{1r} \\ \vdots & & \\ D_r B_{r1} & & D_r B_{rr} \end{bmatrix} = I_n$$ et donc pour tout i

$D_i B_{i,i} = I_{n_i}$ d'où $D_i \in GL_{n_i}(K)$ avec $B_{i,i} = D_i^{-1}$ (inversibilité à droite suffisante) et $D_i B_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ d'où $B_{ij} = 0$

$\Leftarrow$ en posant $A' = \begin{bmatrix} D_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_r^{-1} \end{bmatrix}$ on constate, par produits par blocs, que $AA' = A'A = I_n$. CQFD

Prop 11: Soit $A \in M_{n,p}(K)$ décomposée par blocs $A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}$

Alors A^T est décomposée par blocs $s \times r$: $A^T = \begin{bmatrix} A'_{11} & \cdots & A'_{1r} \\ \vdots & & \\ A'_{s1} & \cdots & A'_{sr} \end{bmatrix}$

avec $\forall i,j \in [\![1,s]\!] \times [\![1,r]\!] \quad A'_{i,j} = A_{j,i}^T$

Preuve : évident visuellement.

Prop 12: Soit $A = \begin{bmatrix} D_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & D_r \end{bmatrix}$ triangulaire, de blocs diagonaux carrés (A est donc carrée elle aussi)

On a alors $$\det A = \prod_{i=1}^{r} \det A_i$$

Preuve : • cas $r=2$. on donne $A = \begin{bmatrix} D_1 & B \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$ et on considère

$\varphi : M_{n_1}(K) \to K, \ M \mapsto \det \begin{bmatrix} M & B \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$: la présence des 0 assure que φ est n_1-linéaire & alternée en les colonnes de M

donc, par caractérisation du déterminant, (1) $\varphi(M) = \lambda \det M$ pour un $\lambda \in K$, avec $\lambda = \varphi(I_{n_1})$ en prenant $M = I_{n_1}$.

Reste à calculer $\lambda = \varphi(I_{n_1}) = \det \begin{bmatrix} I_{n_1} & B \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$.

On considère $\psi : M_{n_2}(K) \to K$; $M \mapsto \det \begin{bmatrix} I_{n_1} & B \\ 0 & M \end{bmatrix}$, qui est n_2-linéaire alternée en les lignes de M (toujours par cas 0...)

Exactement idem, on a $\psi(M) = \mu \det M$ pour un $\mu \in K$.

En prenant $M = I_{n_2}$ il vient $\mu = \psi(I_{n_2}) = \det \begin{bmatrix} I_{n_1} & * \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} = 1$

↪ triangulaire !

Bilan : $\lambda = \psi(D_2) = \det D_2$ (2) d'où par (1)

$$\det A = \varphi(D_1) = \det D_2 \times \det D_1$$

. Cas général : récurrence sur r, évidente pour $r=1$ et $r \to r+1$ en invoquant le cas $r=2$. CQFD

Illustration : comme avec une matrice écrite "traditionnellement", on utilise la prop 12 pour une matrice décomposée par blocs, en la multipliant à droite ou à gauche par des matrices simples (de transvection par blocs) de sorte à obtenir une matrice triangulaire par blocs

Ex 1 : avec $T(\lambda) = \begin{bmatrix} I_p & \lambda I_p \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$ où $A_i \in M_p(K)$

on a

$$AT = \begin{bmatrix} A_1 & \lambda A_1 + A_2 \\ A_3 & \lambda A_3 + A_4 \end{bmatrix}$$ correspondant à $C_2 \leftarrow C_2 + \lambda C_1$

$$TA = \begin{bmatrix} A_1 + \lambda A_3 & A_2 + \lambda A_4 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$ correspondant à $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2$

Ex 2 : Calculer $\det \begin{bmatrix} A & C \\ B & B \end{bmatrix}$, où $A, B \in M_n(K)$

Soit $M = \begin{bmatrix} A & C \\ B & B \end{bmatrix}$ on a $M \times \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}}_{T} = \begin{bmatrix} A-C & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = M'$

donc $\det(MT) = \det M \underbrace{\det T}_{1} = \det M' = \det(A-C) \det B$