Calcul différentiel : Résolutions d'EDP

Proposition 12. *Soient*

- E, F *des* $\mathbf{R}$*-ev de dim finie et* U *ouvert de* E
- $f : U \to F$ *une application* C^1
- $i \in [\![1, n]\!]$ *(où* $n = \dim E$*)*

On suppose

$\boxed{hyp1}$ $\partial_i f = 0$

$\boxed{hyp2}$ *Pour tout* $a \in U$*, l'ensemble* $I_{i,a}$ *des* t *tels que* $(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \in U$ *est un intervalle*

Alors, en notant π_i *l'application qui à* $x \in \mathbf{R}^n$ *associe* $\pi_i(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n-1}$ *(i.e. le vecteur obtenu en enlevant la coordonnée n*^{o} i*)*

$\boxed{C\ell_1}$ $V = \pi_i(U)$ *est un ouvert de* $\mathbf{R}^{n-1}$

$\boxed{C\ell_2}$ *Il existe* $g \in \mathrm{C}^1(V, F)$ *telle que* $f = g \circ \pi_i$

Démonstration. Pour simplifier les notations, on va supposer $i = 1$ (sans perte de généralité). Soit donc $f : U \to F$ C^1 telle que $\partial_1 f = 0$.

Étape 1 : On fixe $a \in U$; la fct $t \mapsto f(t, a_2, \dots, a_n)$ est constante sur $I_{1,a}$, car de dérivée nulle sur un intervalle. Du coup $f(t, a_2, \dots, a_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Étape 2 : L'étape précédente nous dit que pour $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V$, on peut poser $g(x) = f(a_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ pour n'importe quel choix de a_1 tel que $(a_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in U$. On a alors bien $f = g \circ \pi_1$.

Étape 3 : V est un ouvert de $\mathbf{R}^{n-1}$. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in V$, et a_1' tel que $(a_1', a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$. Pour $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ suffisamment proche de $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, on aura $(a_1', x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ proche de $(a_1', a_1, a_2, \dots, a_n)$, donc dans U puisque U ouvert, et donc $\boxed{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in V}$.

Étape 4 : Enfin g est C^1. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in V$, et a_1' tel que $(a_1', a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$. Pour $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in V$ suffisamment proche de $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, on aura $g(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(a_1', x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ et donc g est (au voisinage de $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$) la composée de $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \mapsto (a_1', x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ par f, donc C^1 par composition.

$\square$

Exemple 1. Soit $(E) : x\partial_1 f + y\partial_2 f = f$ sur $U = \mathbf{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[$. En posant $g = f \circ \varphi$ comme en cours, on a f sol de $(E) \Leftrightarrow g$ est solution de $(E') : r\partial_1 g(r, \theta)) = g(r, \theta)$.
L'idée est décrire
$r\partial_1 g(r,\theta)) - g(r,\theta) = r\Big(\partial_1 g(r,\theta) - \frac{1}{r} g(r,\theta)\Big) = r\partial_1\Big(g(r,\theta)\exp(-\operatorname{Log} r)\Big)\exp(\operatorname{Log} r)$ et donc g est solution de $(E') : \Leftrightarrow \partial_1\Big(\frac{1}{r} g(r,\theta)\Big) = 0$, et on est dans les conditions d'applications de la prop 12 : il existe donc h C^1 sur $]-\pi, \pi[$ telle que $\frac{1}{r} g(r,\theta) = h(\theta)$ et donc $g(r,\theta) = rh(\theta)$.
Les solutions de (E) sont donc les f de la forme $\boxed{f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2} h\left(\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}\right)}$.

Exemple 2. Soit $(E) : \partial_{1,1}f - \frac{1}{c^2}\partial_{2,2}f = 0$ sur $U = \mathbf{R}^2$ (l'inconnue f étant supposée C^2). Pour simplifier les notations, je vais le faire avec $c = 1$.
On procède par chgmt de variable linéaire : on pose $f = g \circ \psi$ avec $\psi(x, y) = (ax+by, cx+dy)$ un automorphisme de $\mathbf{R}^2$, et on va choisir ψ de sorte que f solution de $(E) \Leftrightarrow g$ solution de (E') $\partial_{1,2}g = 0$.

Étape 1 : f étant C^2, g aussi par thm généraux, et on a en différentiant $f = g \circ \psi$ les relations, comme vu en ex en classe
$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_1 f(x,y) & = & a\partial_1 g(u,v) + c\partial_2 g(u,v) \\ \partial_2 f(x,y) & = & b\partial_1 g(u,v) + d\partial_2 g(u,v) \end{array}\right. \text{ en notant } (u,v) = \psi(x,y) = (ax+by, cx+dy)$$

Étape 2 : L'étape précédente nous dit qu'en notant
$g_1(u,v) = a\partial_1 g(u,v) + c\partial_2 g(u,v)$ et $g_2(u,v) = b\partial_1 g(u,v) + d\partial_2 g(u,v)$, on a $\boxed{\partial_i f = g_i \circ \psi}$ pour $i = 1, 2$. Pour obtenir les dérivées partielles d'ordre deux, on peut donc remplacer f par $\partial_i f$, et g par g_i dans les relations de l'étape 1. Il vient
$$\begin{aligned}\partial_{1,1}f = \partial_1(\partial_1 f) &= a(\partial_1 g_1) \circ \psi(x,y) + c(\partial_2 g_1) \circ \psi(x,y) \\ &= a(\partial_1(a\partial_1 g + c\partial_2 g)) \circ \psi(x,y) + c(\partial_2(a\partial_1 g + c\partial_2 g)) \circ \psi(x,y)\end{aligned}$$
$\boxed{\partial_{1,1}f = (a^2\partial_{1,1}g + 2ac\partial_{1,2}g + c^2\partial_{2,2}g) \circ \psi(x,y)}$ et de même
$\boxed{\partial_{2,2}f = (b^2\partial_{1,1}g + 2bd\partial_{1,2}g + d^2\partial_{2,2}g) \circ \psi(x,y)}$

Étape 3 : Du coup f est solution de $(E) \Leftrightarrow g$ est solution de
$(E') : (a^2 - b^2)\partial_{1,1}g + 2(ac - bd)\partial_{1,2}g + (c^2 - d^2)\partial_{2,2}g = 0$ (puique ψ est bijectif, on a $G \circ \psi = 0 \Leftrightarrow G = 0$).
On choisit $a = b = 1$ et $c = -d = 1$ et on obtient :
$\boxed{f \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow g \text{ est solution de } (E') : \partial_{1,2}g = 0}$.

Étape 4 : On résout (E') à l'aide de la prop 12 deux fois. D'abord $\partial_1(\partial_2 g) = 0$, donc $\partial_2 g$ ne dépend pas de u, ie on peut écrire $\partial_2 g(u,v) = h(v)$ pour une fonction h C^1, et en primitivant h en H, on obtient $\partial_2(g(u,v) - H(v)) = 0$, donc $g(u,v) - H(v) = I(u)$ pour une fonction I de classe C^2.

Étape 5 : Concluons : les solutions de (E') sont les g C^2 s'écrivant $g(u,v) = H(v) + I(u)$ et les solutions de (E) sont les f C^2 s'écrivant $f(x,y) = H(x-y) + I(x+y)$ pour des fonctions H et I C^2 sur $\mathbf{R}$ (on trouve $f(x,y) = H(x-cy) + I(x+cy)$ pour l'équation $(E) : \partial_{1,1}f - \frac{1}{c^2}\partial_{2,2}f = 0$).