

Familles sommables de nombres réels.

1 Notion de famille sommable de réels ou de complexes.

1.1. Rappels relatifs à $\overline{\mathbf{R}}$.

1.1.1. L'ensemble $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est muni de l'unique ordre prolongeant celui de $\mathbf{R}$ tel que $-\infty < x < +\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}$: ainsi $\overline{\mathbf{R}}$ possède un plus grand et un plus petit élément.

1.1.2. Toute partie A de $\mathbf{R}$ non vide et majorée (resp. minorée) possède une borne sup. (resp. une borne inf.) dans $\mathbf{R}$. Si A n'est pas majorée (resp. minorée) dans $\mathbf{R}$, vue comme partie de $\overline{\mathbf{R}}$, $+\infty$ (resp. $-\infty$) est donc le seul majorant (resp. minorant) de A : on pose alors $\sup A = +\infty$ (resp. $\inf A = -\infty$).

Avec ces convention, toute partie de $\mathbf{R}$ (et même de $\overline{\mathbf{R}}$) possède une borne sup. et une borne inf. Retenir les équivalences, pour $A \subset \mathbf{R}$:

$$\sup A = +\infty \Leftrightarrow A \text{ n'est pas majorée (dans } \mathbf{R}) \text{ et } \sup A < +\infty \Leftrightarrow A \text{ est majorée (dans } \mathbf{R}).$$

1.1.3. On peut aussi prolonger partiellement à $\overline{\mathbf{R}}$ l'addition et la multiplication réelle, en posant $x \pm \infty = \pm\infty + x = \pm\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times x = \pm \text{signe}(x)\infty$ pour tout $x \neq 0$.

On pose aussi $0 \times \infty = 0$, convention commode pour énoncer les théorèmes généraux relatifs aux opérations sur les sommes : on se convaincra que cette convention n'engendre pas de paradoxe, et que la distributivité est préservée.

Mais on ne définit pas $+\infty - \infty$. Comme dans l'étude des limites, toute tentative de définition aboutit à un paradoxe.

1.2. Familles sommables de réels positifs. I désigne un ensemble que le programme officiel suppose dénombrable, mais cette hypothèse n'intervient nulle part dans ces notes, on ne la fera donc pas : I est donc quelconque.

On notera $\mathbf{K}^I$ l'ensemble des familles $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbf{K}$ – en d'autres termes, l'ensemble des applications de I dans $\mathbf{K}$ (on note x_i au lieu de $f(i)$).

1.2.1. Somme d'une famille de positifs . Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de $\overline{\mathbf{R}}_+$. Pour toute partie $I_0 \subset I$ finie, la «somme partielle» $\sum_{i \in I_0} x_i$ est bien définie dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ (et dans $\mathbf{R}$ si les x_i sont tous réels). On pose, et cela fait sens dans $\overline{\mathbf{R}}_+$:

$$\sum_{i \in I} x_i := \sup \left\{ \sum_{i \in I_0} x_i : I_0 \subset I \text{ finie} \right\}$$

on a donc $\sum_{i \in I} x_i \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

1.2.2. Définition. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de **réels positifs** est dite **sommable** si $\sum_{i \in I} x_i < +\infty$, i.e. si l'ensemble formé des $\sum_{i \in I_0} x_i$ quand I_0 varie parmi les parties finies de I est un ensemble majoré de $\mathbf{R}$.

Bien entendu, une famille $(x_i)_{i \in I}$ ne peut être sommable si l'un des x_i est infini.

1.3. Familles sommables de nombres complexes.

1.3.1. Définition. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de **nombres complexes** est dite **sommable** si la famille des réels positifs $(|x_i|)_{i \in I}$ l'est, autrement dit, par définition :

$$(x_i)_{i \in I} \text{ est sommable} \Leftrightarrow \sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$$

De cette sorte, la plupart des assertions relatives à la sommabilité se démontrent en se ramenant au cas positif. Un bon réflexe consiste à **prendre les modules avant de réfléchir**.

1.3.2. Somme d'une famille sommable de complexes. Donnons ici la formule définissant la somme d'une famille sommable de complexes – on ne pourra la justifier que plus loin : la charge est que cette extension permette de conserver les propriétés de la somme portant sur des ensembles finis (linéarité, positivité, Fubini etc) et on a besoin d'un peu de théorie pour y parvenir : cf 2.1.2. Pour faciliter le repérage, indiquons ici :

- Pour une famille sommable $(x_i)_{i \in I}$ de nombres réels, on pose

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-$$

avec $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = \max(-x, 0)$, de sorte que $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$ pour tout réel x .

- Pour une famille sommable $(x_i)_{i \in I}$ de nombres complexes, on pose

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} \Re(x_i) + i \sum_{i \in I} \Im(x_i)$$

2 Théorèmes généraux.

I désigne à nouveau un ensemble quelconque.

2.1. Critères de sommabilité.

2.1.1. Une reformulation de la définition.

Proposition 1. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de $\mathbf{K}$ est sommable si et seulement si il existe $M \geq 0$ tel que $\sum_{i \in I_0} |x_i| \leq M$ pour toute $I_0 \subset I$ finie

Les sommes finies $\sum_{i \in I_0} x_i$ s'appellent parfois **sommes partielles** de la famille des x_i .

Illustrations :

1. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathbf{K}$.

- Si les x_i sont tous ≥ 0 , alors on a, pour tout $J \subset I$, $\sum_{j \in J} x_j \leq \sum_{i \in I} x_i$.

- Si les x_i forment une famille sommable, alors **toute sous-famille des x_i est sommable**, i.e. pour tout $J \subset I$, $(x_j)_{j \in J}$ est sommable.

En effet, dans le cas positif, on a $\sum_{i \in I_0} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$ pour toute $I_0 \subset I$ finie; on a aussi $\sum_{j \in J_0} x_j \leq \sum_{i \in I} x_i$ pour toute $J_0 \subset J$ finie, vu que $J_0 \subset I$. Ainsi, $\sum_{i \in I} x_i$ est un majorant des sommes partielles de la famille des x_j , $j \in J$, et donc majore $\sum_{j \in J} x_j$. Le cas général s'en déduit, en remplaçant la famille des x_i par celle des $|x_i|$.

2. Soient $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ des **familles de carré sommable**, *i.e.* telles que $\sum_{i \in I} |x_i|^2$ et $\sum_{i \in I} |y_i|^2$ sont $< +\infty$. Alors $(x_i y_i)_{i \in I}$ est sommable et on a

$$(CS) \left| \sum_{i \in I} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i \in I} |x_i|^2 \sum_{i \in I} |y_i|^2}$$

En effet, pour toute $I_0 \subset I$ finie on a $\sum_{i \in I_0} |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i \in I_0} |x_i|^2 \sum_{i \in I_0} |y_i|^2}$ par (CS) usuel, et donc $\sum_{i \in I_0} |x_i y_i| \leq \sqrt{MM'}$ en désignant par M et M' des majorants des sommes partielles de droite : d'où la sommabilité de $(x_i y_i)_{i \in I}$ et la majoration $\sum_{i \in I} |x_i y_i| \leq \sqrt{MM'}$ (la borne sup est le plus petit des majorants). L'inégalité triangulaire, énoncée plus loin, permet d'obtenir la majoration voulue, en prenant M et M' égaux aux sommes des familles des $|x_i|^2$ et $|y_i|^2$.

2.1.2. Critère de majoration.

Proposition 2. Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs.

Supposons

$\boxed{hyp}$ pour tout i , $a_i \leq b_i$.

Alors on a, dans $\overline{\mathbf{R}}_+$,

$\boxed{Cl}$ $\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$.

Démonstration. En effet, pour tout $I_0 \subset I$ finie on a $\sum_{i \in I_0} a_i \leq \sum_{i \in I_0} b_i \leq \sum_{i \in I} b_i$, donc le réel $\sum_{i \in I} b_i$ majore les sommes partielles de $(a_i)_{i \in I}$, d'où le résultat en qualité du plus petit des majorants de la borne sup. $\square$

Corollaire (Critère de majoration). Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de $\mathbf{K}$. Supposons

$\boxed{hyp1}$ $(b_i)_{i \in I}$ sommable,

$\boxed{hyp2}$ pour tout i , $|a_i| \leq b_i$.

Alors

$\boxed{Cl}$ $(a_i)_{i \in I}$ est sommable.

Démonstration. En effet, d'après la proposition précédente, on a $\sum_{i \in I} |a_i| \leq \sum_{i \in I} b_i < +\infty$, d'où le résultat. $\square$

Justification de la définition de la somme. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels. Les majorations $x_i^+ \leq |x_i|$ et $x_i^- \leq |x_i|$ assurent que les familles de réels positifs $(x_i^+)_{i \in I}$ et $(x_i^-)_{i \in I}$ sont sommables, par majoration. Ainsi, le nombre $\sum_{i \in I} x_i := \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-$ est bien défini.

• Pour une famille sommable $(x_i)_{i \in I}$ de nombres complexes, on a $|\Re(x_i)| \leq |x_i|$ et $|\Im(x_i)| \leq |x_i|$, donc les familles $(\Re(x_i))$ et $(\Im(x_i))$ sont des familles sommables de réels, donc on peut définir correctement

$$\sum_{i \in I} x_i := \sum_{i \in I} \Re(x_i) + i \sum_{i \in I} \Im(x_i).$$

Remarque : Cette définition est la seule raisonnable possible : en effet, vu que $x_i = x_i^+ - x_i^-$, si la somme existe et qu'elle est linéaire, on doit avoir $\sum_{i \in I} x_i := \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-$ par linéarité. On verra que cette linéarité n'est pas tout à fait triviale à établir.

2.2. Propriétés de la somme Toutes les assertions relatives aux familles ≥ 0 sont vraies pour des familles de $\overline{\mathbf{R}}_+$: c'est en fait trivial si l'un des x_i est $+\infty$, mais très utile pour formuler simplement le théorème de sommation par paquets.

2.2.1. Linéarité

Proposition 3. Soient $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in \mathbf{K}^I$, $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$.

1. Si les a_i , les b_i , λ et μ sont tous **positifs** alors on a dans $\overline{\mathbf{R}}_+$

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$$

avec la convention $0 \times \infty = 0$ (si $\lambda = 0$ et $\sum_{i \in I} a_i = +\infty$ par ex)

2. Dans le cas général, si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ sont supposées sommables, alors $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i \in I}$ l'est aussi et l'on a dans $\mathbf{K}$

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$$

Démonstration.

• **Le cas ≥ 0 .** Soit $I_0 \subset I$, on a

$$\sum_{i \in I_0} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I_0} a_i + \mu \sum_{i \in I_0} b_i \leq \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i \text{ et donc } \boxed{\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) \leq \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i}.$$

Dans l'autre sens, on écrit d'abord

$\lambda \sum_{i \in I_0} a_i + \mu \sum_{i \in I_0} b_i = \sum_{i \in I_0} (\lambda a_i + \mu b_i) \leq \sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i)$. Ceci vaut pour tout I_0 , donc si l'on se donne $A < \sum_{i \in I} a_i$ et $B < \sum_{i \in I} b_i$, on aura $\lambda A + \mu B \leq \sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i)$ (en prenant I_0 suffisamment grosse pour que les sommes partielles des a_i et des b_i dépassent A et B respectivement) ce qui entraîne $\boxed{\lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i \leq \sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i)}$ en faisant tendre A et B vers les sommes des a_i et des

b_i .

• **Cas général.**

On justifie d'abord la sommabilité de $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i \in I}$: par IT on a $|\lambda a_i + \mu b_i| \leq c_i := |\lambda| |a_i| + |\mu| |b_i|$. La famille (c_i) est une combinaison linéaire positive de familles positives, le 1er point s'applique et fournit, dans $\overline{\mathbf{R}}_+$:

$$\sum_{i \in I} c_i = |\lambda| \sum_{i \in I} |a_i| + |\mu| \sum_{i \in I} |b_i| < +\infty \text{ par hyp.}$$

d'où la sommabilité.

L'égalité entre les sommes se prouve en se ramenant au cas ≥ 0 . On écrit pour cela, pour tout $i \in I$,

$$(\lambda a_i + \mu b_i)^+ - (\lambda a_i + \mu b_i)^- = \lambda a_i + \mu b_i = (\lambda^+ - \lambda^-)(a_i^+ - a_i^-) + (\mu^+ - \mu^-)(b_i^+ - b_i^-),$$

on développe et on regroupe pour avoir

$$(\lambda a_i + \mu b_i)^+ + \lambda^- a_i^+ + \lambda^+ a_i^- + \mu^- b_i^+ + \mu^+ b_i^- = (\lambda a_i + \mu b_i)^- + \lambda^+ a_i^+ + \lambda^- a_i^- + \mu^+ b_i^+ + \mu^- b_i^-$$

On peut sommer sur i ces égalités et par linéarité positive on a dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ (en fait dans $\mathbf{R}$ car les familles sont toutes sommables) et l'on regroupe les termes ce qui donne d'abord

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i)^+ - \sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i)^- = \lambda^+ \left(\sum_{i \in I} a_i^- - \sum_{i \in I} a_i^+ \right) + \lambda^- \left(\sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^- \right) + \mu^+ \left(\sum_{i \in I} b_i^- - \sum_{i \in I} b_i^+ \right) + \mu^- \left(\sum_{i \in I} b_i^+ - \sum_{i \in I} b_i^- \right)$$

d'où le résultat.

Le cas complexe se traite de façon analogue, sans difficulté supplémentaire, en séparant parties imaginaires et réelles. $\square$

Corollaire (Croissance de la somme). Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de $\mathbf{R}$.
Supposons

$\boxed{\text{hyp1}}$ (a_i) et (b_i) sommables,

$\boxed{\text{hyp2}}$ pour tout i , $a_i \leq b_i$.

Alors on a, dans $\mathbf{R}$,

$\boxed{\text{Cl}}$ $\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$.

Démonstration. On a $c_i := b_i - a_i \geq 0$, donc par croissance dans le cas positif $\sum_{i \in I} c_i \geq 0$, puis par linéarité, on en déduit $\sum_{i \in I} b_i - \sum_{i \in I} a_i \geq 0$ d'où le résultat. $\square$

Remarque : Attention à la similitude avec la prop 2.

On peut résumer ainsi les deux précédents résultats :

Corollaire. Notons $\ell^1(I)$ ou $\ell^1(I, \mathbf{K}) = \{x = (x_i)_{i \in I} ; \sum_{i \in I} |x_i| < +\infty\}$.

Alors $\ell^1(I, \mathbf{K})$ est un sous-ev de $\mathbf{K}^I$ et $S : x \mapsto \sum_{i \in I} x_i$ est une forme linéaire positive (et donc croissante) sur $\ell^1(I, \mathbf{K})$.

Corollaire (Inégalité triangulaire.). Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de $\mathbf{K}$. On a alors

$$(IT) \left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i|$$

Démonstration. Notons $S = \sum_{i \in I} x_i$. On a $|S| = S e^{i\theta}$ pour un $\theta \in \mathbf{R}$, et donc $|S| = \sum_{i \in I} (x_i e^{i\theta})$, qui est un réel. Par définition de la somme de complexes, on a donc $|S| = \sum_{i \in I} \Re(x_i e^{i\theta}) + i \sum_{i \in I} \Im(x_i e^{i\theta})$. La partie imaginaire étant nulle, il reste $|S| = \sum_{i \in I} \Re(x_i e^{i\theta})$ et comme $|\Re(z)| \leq |z|$, on en tire par croissance de la somme $|S| = \sum_{i \in I} \Re(x_i e^{i\theta}) \leq \sum_{i \in I} |x_i|$. $\square$

2.2.2. Invariance vis-à-vis de l'ensemble de sommation.

Proposition 4. Soient

- I, J deux ensembles équipotents,
- $\varphi : J \rightarrow I$ une bijection,
- $(x_i)_{i \in I}$ une famille,

Posons, pour $j \in J$, $y_j := x_{\varphi(j)}$.

Supposons

$\boxed{\text{hyp}}$ les x_i sont tous ≥ 0

Alors on a, dans $\overline{\mathbf{R}}_+$,

$\boxed{\text{Cl}}$ $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} y_j$.

Démonstration. Soit $J_0 \subset J$ une partie finie, on a

$\sum_{j \in J_0} y_j = \sum_{j \in J_0} x_{\varphi(j)} = \sum_{i \in \varphi(J_0)} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$, donc la somme des x_i majore les sommes partielles des y_j , d'où la majoration $\boxed{\sum_{j \in J} y_j \leq \sum_{i \in I} x_i}$ en qualité de plus petit majorant de la borne sup.

Comme on a aussi $x_i = y_{\varphi^{-1}(i)}$, en échangeant x et y et en remplaçant φ par φ^{-1} , on a $\boxed{\sum_{j \in J} y_j \geq \sum_{i \in I} x_i}$, d'où le résultat. $\square$

On en déduit immédiatement, par définition de la somme d'une famille sommable et par linéarité désormais acquise :

Corollaire. Soient

- I, J deux ensembles équipotents,
- $\varphi : J \rightarrow I$ une bijection,
- $(x_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathbf{K}$,

Posons, pour $j \in J$, $y_j := x_{\varphi(j)}$.

Supposons

$\boxed{\text{hyp}}$ $(x_i)_{i \in I}$ sommable

Alors,

$\boxed{\text{Cl1}}$ $(y_j)_{j \in J}$ est sommable et

$\boxed{\text{Cl2}}$ on a dans $\mathbf{K}$: $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} y_j$.

2.2.3. Familles sommables indexées par $\mathbf{N}$ et séries

Proposition 5. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels positifs. On a alors, dans $\overline{\mathbf{R}}_+$,

$\boxed{\text{Cl}}$ $\sum_{n \in \mathbf{N}} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

Démonstration.

- Pour tout $n \geq 0$, $\mathbf{N}_n = [0, n]$ est une partie finie de $\mathbf{N}$, et donc on a $\sum_{k=0}^n x_k \leq \sum_{k \in \mathbf{N}} x_k$, et donc

en faisant $n \rightarrow \infty$ par passage à la limite dans les inégalités il vient $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n}$.

- Soit $I_0 \subset \mathbf{N}$ une partie finie : I_0 est donc majorée, et pour un n convenable on a donc $\sum_{i \in I_0} x_i \leq \sum_{k=0}^n x_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} x_k$. Les sommes $\sum_{i \in I_0} x_i$ sont donc majorées par $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$, leur sup aussi

et donc $\boxed{\sum_{n \in \mathbf{N}} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} x_n}$. □

Si les x_n sont dans $\mathbf{K}$, en appliquant cette proposition à $(|x_n|)$ et en usant de la linéarité de la somme on en tire :

Corollaire. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de $\mathbf{K}$. On a équivalence

- (i) $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est sommable,
- (ii) la série $\sum x_n$ est absolument convergente.

Si tel est le cas, on a alors $\sum_{n \in \mathbf{N}} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$

On en déduit un premier résultat portant sur les séries numériques

Corollaire. Soient

- $\sum x_n$ une série numérique,
- $\sigma : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ une bijection,

Supposons

$\boxed{\text{hyp}}$ $\sum x_n$ absolument convergente

Alors,

$\boxed{\text{Cl1}}$ $\sum x_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et

$\boxed{\text{Cl2}}$ on a dans $\mathbf{K}$: $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$.

Démonstration. Par invariance vis-à-vis de l'ensemble d'indices, les familles $(x_{\sigma(n)})$ et (x_n) sont simultanément sommables (ou pas) et de sommes égales. Quand tel est le cas, la proposition précédente fait le lien avec les sommes des séries associées. □

Remarque : La proposition est fautive dans le cas d'une série $\sum x_n$ convergente mais non absolument convergente (e.g. $x_n = (-1)^n/n + 1$). On peut montrer alors que pour tout réel x , il existe une bijection $\sigma : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = x$ (cf Centrale PSI 2009 1ère).

2.2.4. Exercice. Soient I un ensemble, $A \subset I$ une partie et $(x_i)_{i \in A}$ une famille de $\mathbf{K}$ que l'on prolonge en une famille indexée par I en posant $\tilde{x}_i = x_i$ si $i \in A$, et $\tilde{x}_i = 0$ pour $i \notin A$. Montrer que si les x_i sont tous ≥ 0 , alors on a dans $\overline{\mathbf{R}}$: $\sum_{i \in A} x_i = \sum_{i \in I} \tilde{x}_i$, puis, dans le cas général, que $(x_i)_{i \in A}$ est sommable si et seulement si $(\tilde{x}_i)_{i \in I}$ l'est, avec égalité des sommes quand cela est le cas.

Indication : Pour $A_0 \subset A$ finie, on a $\sum_{i \in A_0} x_i = \sum_{i \in A_0} \tilde{x}_i \leq \sum_{i \in I} \tilde{x}_i$, et pour $I_0 \subset I$ finie, on a $\sum_{i \in I_0} \tilde{x}_i = \sum_{i \in A \cap I_0} x_i \leq \sum_{i \in A} x_i$.

3 Sommation par paquets et conséquences.

Les résultats de cette section sont les plus importants de ce chapitre. Les théorèmes de sommation par paquets sont aussi des critères puissants pour établir la sommabilité d'une famille, complétant ainsi ceux de la section précédente.

3.1. Le théorème de sommation par paquets.

3.1.1. Le cas des familles ≥ 0 .

Théorème 1 (Sommes par paquets, cas ≥ 0). *Soient :*

- I, Λ des ensembles,
- $(x_i)_{i \in I}$ une famille,
- $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition de I (i.e. une famille de parties de I non nécessairement non vides, deux à deux disjointes dont la réunion est I).

Supposons

$\boxed{\text{hyp}}$ Pour tout i , $x_i \geq 0$.

Alors, on a dans $\overline{\mathbf{R}}_+$

$$\boxed{\text{Cl}} \quad \sum_{i \in I} x_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in I_\lambda} x_i \right).$$

Démonstration. Il sera commode de noter $S(I_\lambda) = \sum_{i \in I_\lambda} x_i$ (correctement dans $\overline{\mathbf{R}}_+$)

- Soit $\Lambda_0 \subset \Lambda$ et, pour $\lambda \in \Lambda_0$, $I_{\lambda,0} \subset I_\lambda$ des parties finies. D'après le cours sur les sommes finies on a, en notant $I_0 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} I_{\lambda,0}$, $\sum_{\lambda \in \Lambda_0} S(I_{\lambda,0}) = \sum_{i \in I_0} x_i$, et par conséquent $\sum_{\lambda \in \Lambda_0} S(I_{\lambda,0}) \leq \sum_{i \in I} x_i$. Soient, pour tout λ , A_λ des réels tels que $A_\lambda < S(I_\lambda)$. Par définition de la somme d'une famille de réels ≥ 0 , pour $I_{\lambda,0}$ assez grande (au sens de l'inclusion), on aura $A_\lambda \leq S(I_{\lambda,0})$ et donc $\sum_{\lambda \in \Lambda_0} A_\lambda \leq \sum_{i \in I} x_i$. On fait alors tendre A_λ vers $S(I_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda_0$ et on en tire $\sum_{\lambda \in \Lambda_0} S(I_\lambda) \leq \sum_{i \in I} x_i$. Ainsi, le nombre $\sum_{i \in I} x_i$ majore les sommes partielles de la famille $\left(S(I_\lambda) \right)_{\lambda \in \Lambda}$, d'où

$$\boxed{\sum_{\lambda \in \Lambda} S(I_\lambda) \leq \sum_{i \in I} x_i}.$$

- Soit $I_0 \subset I$ finie et Λ_0 l'ensemble (fini) des λ tels que $I_{\lambda,0} := I_\lambda \cap I_0 \neq \emptyset$. On a, du fait de l'inclusion $I_0 \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} I_{\lambda,0}$, $\sum_{i \in I_0} x_i \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_0} S(I_{\lambda,0})$, lui même $\leq \sum_{\lambda \in \Lambda_0} S(I_\lambda)$, d'où enfin $\sum_{i \in I_0} x_i \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} S(I_\lambda)$, ce qui fournit, par caractérisation de la borne sup comme le plus petit des majorants,
$$\boxed{\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} S(I_\lambda)}.$$

□

3.1.2. Le cas général. Le théorème de sommation par paquets fournit alors un nouveau critère permettant de prouver la sommabilité d'une famille.

Théorème 2 (Sommatons par paquets, cas général.). *Soient :*

- I, Λ des ensembles,
- $(x_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathbf{K}$,
- $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition de I (i.e. une famille de parties de I non nécessairement non vides, deux à deux disjointes dont la réunion est I).

Supposons

$\boxed{\text{hyp}}$ $(x_i)_{i \in I}$ sommable.

Alors,

$\boxed{\text{Cl1}}$ Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la famille $(x_i)_{i \in I_\lambda}$ est sommable,

$\boxed{\text{Cl2}}$ en notant $s_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} x_i$, la famille $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable et

$\boxed{\text{Cl3}}$ on a l'égalité dans $\mathbf{K}$: $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in I_\lambda} x_i \right)$.

Démonstration.

- La famille $(x_i)_{i \in I_\lambda}$ est sommable en tant que sous-famille d'une famille sommable.
- Pour $\lambda \in \Lambda$, on a par (IT) : $|s_\lambda| = \left| \sum_{i \in I_\lambda} x_i \right| \leq \sigma_\lambda \sum_{i \in I_\lambda} |x_i|$. Le théorème de sommation par paquets cas ≥ 0 assure que $(\sigma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable (de somme $\sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$, d'où le résultat par majoration).
- L'égalité finale se déduit du cas positif pour les familles de réels d'abord, puis de complexes. $\square$

Scholie : en pratique, le théorème de sommation par paquets s'utilise en deux temps :

1. On explicite d'abord une partition de I adaptée au problème à résoudre si elle n'est pas fournie.
2. On montre la sommabilité de $(x_i)_{i \in I}$ en montrant que $\sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in I_\lambda} |x_i| \right) < +\infty$ (souvent en calculant explicitement l'une après l'autre les deux sommes). Le théorème de sommation par paquets ≥ 0 assure alors que $\sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$.
3. On calcule $\sum_{i \in I} x_i$ à l'aide de Cl3, en calculant explicitement l'une après l'autre les deux sommes imbriquées, souvent par un calcul analogue.

3.2. Le théorème de Fubini. Dans le cas où l'ensemble d'indice I est de la forme $I = J \times K$, on a deux partitions naturelles de I :

1. La partition par tranches verticales $(\{j\} \times K)_{j \in J}$,
2. celle à tranches horizontales $(J \times \{k\})_{k \in K}$

où bien sûr $\{j\} \times K$ désigne l'ensemble des (j, k) quand k varie dans K . On obtient les deux résultats suivants :

Théorème 3 (Fubini, cas ≥ 0). *Soient :*

- J, K des ensembles,
- $(x_{j,k})_{(j,k) \in J \times K}$ une famille.

Supposons

$\boxed{\text{hyp}}$ Pour tous j, k , $x_{j,k} \geq 0$.

Alors, on a dans $\overline{\mathbf{R}}_+$

$$\boxed{\text{Cl}} \quad \sum_{(j,k) \in J \times K} x_{j,k} = \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} x_{j,k} \right) = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} x_{j,k} \right).$$

Théorème 4 (Fubini, cas général.). *Soient :*

- J, K des ensembles,
- $(x_{j,k})_{(j,k) \in J \times K}$ une famille de $\mathbf{K}$.

Supposons

$\boxed{\text{hyp}}$ $(x_{j,k})_{(j,k) \in J \times K}$ sommable.

Alors,

$\boxed{\text{Cl1}}$ Les familles $(x_{j,k})_{k \in K}$ et $(x_{j,k})_{j \in J}$, respectivement à j et k fixés, sont sommables,

$\boxed{\text{Cl2}}$ Les familles $\left(\sum_{k \in K} x_{j,k}\right)_{j \in J}$ et $\left(\sum_{j \in J} x_{j,k}\right)_{k \in K}$ sont sommables et

$\boxed{\text{Cl3}}$ on a l'égalité dans $\mathbf{K}$:
$$\sum_{(j,k) \in J \times K} x_{j,k} = \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} x_{j,k} \right) = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} x_{j,k} \right).$$

3.3. Produits de sommes et produits de Cauchy. La théorie des familles sommables permet d'exprimer un produit de sommes sous la forme d'une seule somme, en changeant l'ensemble d'indices.

Proposition 6 (Produits de sommes de familles.). *Soient*

- J, K ensembles,
- $(x_j)_{j \in J}$ et $(y_k)_{k \in K}$ deux familles de $\mathbf{K}$.

Supposons

$\boxed{\text{hyp}}$ $(x_j)_{j \in J}$ et $(y_k)_{k \in K}$ sommables.

Alors,

$\boxed{\text{Cl1}}$ La famille $(x_j y_k)_{(j,k) \in J \times K}$ est sommable et

$\boxed{\text{Cl2}}$ on a l'égalité dans $\mathbf{K}$
$$\sum_{(j,k) \in J \times K} x_j y_k = \left(\sum_{j \in J} x_j \right) \times \left(\sum_{k \in K} y_k \right).$$

De plus, l'égalité donnée par $\boxed{\text{Cl2}}$ a lieu dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ sans l'hypothèse de sommabilité, dès lors que les x_j et les y_k sont tous positifs.

Démonstration. On applique le théorème de Fubini à la famille des $z_{j,k} := x_j y_k$: la famille $(x_j y_k)_{(j,k) \in J \times K}$ est sommable, vu que $|x_j y_k| = |x_j| |y_k|$ et que par Fubini positif on a

$$\sum_{(j,k) \in J \times K} |x_j| |y_k| = \sum_{j \in J} \left(\underbrace{\sum_{k \in K} |x_j| |y_k|}_{\text{indép. de } k} \right) = \sum_{j \in J} \left(|x_j| \underbrace{\sum_{k \in K} |y_k|}_{\text{indép. de } j} \right) = \left(\sum_{j \in J} |x_j| \right) \times \left(\sum_{k \in K} |y_k| \right) < +\infty.$$

Du coup, l'usage du théorème de Fubini, cas général, est justifié et un calcul en tous points analogue, mais sans modules, donne l'égalité voulue.

Le cas positif se traite pareillement, à l'aide du théorème de Fubini positif. $\square$

On obtient par récurrence sur p la généralisation suivante :

Corollaire. *Soient*

- $p \geq 1$,
- $I_1, \dots, I_p$ ensembles et $I = I_1 \times \dots \times I_p$,
- pour tout $\ell \in [1, p]$, $(x_{i_\ell})_{i_\ell \in I_\ell}$ des familles de $\mathbf{K}$.

Supposons

$\boxed{\text{hyp}}$ pour tout $\ell \in [1, p]$, $(x_{i_\ell})_{i_\ell \in I_\ell}$ sommable.

Alors,

$\boxed{\text{Cl1}}$ La famille $(x_{i_1} \times \dots \times x_{i_p})_{(i_1, \dots, i_p) \in I}$ est sommable et

$$\boxed{\text{Cl2}} \text{ on a l'égalité dans } \mathbf{K} \quad \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in I} (x_{i_1} \times \dots \times x_{i_p}) = \prod_{\ell=1}^p \left(\sum_{i_\ell \in I_\ell} x_{i_\ell} \right).$$

De plus, l'égalité donnée par $\boxed{\text{Cl2}}$ a lieu dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ sans l'hypothèse de sommabilité, dès lors que les x_{i_ℓ} sont tous positifs.

On en tire enfin un deuxième résultat sur les séries numériques (absolument convergentes)

Théorème 5 (Produit de Cauchy de séries absolument convergentes.). Soient

- $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de $\mathbf{K}$,
- pour tout n , $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Supposons

$$\boxed{\text{hyp}} \sum a_n \text{ et } \sum b_n \text{ absolument convergentes.}$$

Alors,

$$\boxed{\text{Cl1}} \sum c_n \text{ est absolument convergente et}$$

$$\boxed{\text{Cl2}} \text{ on a l'égalité dans } \mathbf{K} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

De plus, l'égalité donnée par $\boxed{\text{Cl2}}$ a lieu dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ sans l'hypothèse de sommabilité, dès lors que les a_n et b_n sont tous positifs.

Démonstration.

- Par lien familles sommables-séries absolument convergentes, les familles (a_j) et (b_k) sont sommables. Il en va donc de même de la famille $\underbrace{(a_j b_k)}_{=x_{j,k}}_{(j,k) \in \mathbf{N}^2}$ et d'après la proposition précédente sur

les produits de sommes, on a
$$\sum_{(j,k) \in \mathbf{N}^2} x_{j,k} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \right) \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

- On applique le théorème de sommation par paquets à $(x_{j,k})_{(j,k) \in \mathbf{N}^2}$, à l'aide de la partition de $I = \mathbf{N}^2$ fournie par les $I_n = \{(j, k) \in I; j + k = n\}$, quand n varie dans $\Lambda = \mathbf{N}$: on en tire que la

famille $\left(\sum_{(j,k) \in I_n} x_{j,k} \right)_{n \in \mathbf{N}}$ est sommable et que
$$\sum_{(j,k) \in \mathbf{N}^2} x_{j,k} = \sum_{n \in \mathbf{N}} \underbrace{\left(\sum_{(j,k) \in I_n} x_{j,k} \right)}_{=c_n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Les deux égalités encadrées fournissent le résultat voulu. $\square$