Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles.

On désigne transversalement dans ce texte, sauf mention du contraire, par :

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie,
- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ,
- I un intervalle non réduit à un point,
- f, g , etc des applications de I dans E .

On rappelle que les fonctions coordonnées de f relatives à la base $\mathcal{B}$ sont les fonctions $f_k : I \rightarrow \mathbf{K}$ ($1 \leq k \leq n$) telles que $f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)e_k$ pour tout $x \in I$.

1 Dérivabilité.

1.1. Définitions.

1.1.1. Une application $f : I \rightarrow E$ est dite **dérivable** (resp. **dérivable à droite, à gauche**) en un point x_0 de I si le taux d'accroissement $\frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$ possède une limite **finie** quand $h \rightarrow 0$ (resp. quand $h \rightarrow 0^+$, $h \rightarrow 0^-$). En posant $x = x_0 + h$, il est équivalent d'étudier le taux d'accroissement $\frac{1}{x-x_0}(f(x) - f(x_0))$ quand $x \rightarrow x_0$ (par valeurs supérieures ou inférieures éventuellement)

Cette limite est appelée **vecteur dérivé** (nombre dérivé si $E = \mathbf{K}$) ou plus simplement **dérivée**, de f en x_0 (resp **dérivée à droite, à gauche** de f) et on la note $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$ (resp $f'_d(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$ pour la dérivée à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$ pour la dérivée à gauche).

Remarque : Toutes les normes sur E étant équivalentes, l'existence et la valeur de la limite du taux d'accroissement est indépendant du choix d'une norme sur E : ce ne serait bien sûr pas le cas si l'on se plaçait dans le cas plus général, mais hors programme, d'un evn E de dimension infinie.

1.1.2. Quand x_0 est une des extrémités (finies) de I , on dit indifféremment dérivée de f en x_0 , ou dérivée à gauche (ou à droite, selon que x_0 est l'extrémité droite ou gauche de I) de f en x_0 .

1.1.3. On a l'équivalence

f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Pour $\Leftarrow$ en effet : en notant alors $\ell = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$, on a

$\left\| \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0)) - \ell \right\| \leq \varepsilon$ pour $h \in]0, \delta_1]$ et dans $[-\delta_2, 0[$, donc pour tout $h \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\}$ en posant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Le sens réciproque est immédiat.

1.1.4. Dans le cas où $E = \mathbf{R}$ et où le quotient $\frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$ possède une limite infinie en 0, on dit que le graphe Γ_f de f admet en $(x_0, f(x_0))$ une tangente verticale (d'équation $x = x_0$) (et pareillement en cas de limite à droite, ou à gauche infinie). Mais f n'est pas dérivable dans ce cas.

1.1.5. En utilisant les notations de Landau, on peut réécrire additivement la dérivabilité. Pour varier, je note $x = x_0 + h$ la variable ($x \rightarrow x_0$)

f est en effet dérivable en $x_0 \Leftrightarrow$ il existe $\ell \in E$ tel que $\frac{1}{x-x_0}(f(x) - f(x_0)) = \ell + o_{x \rightarrow x_0}(1)$

$\Leftrightarrow$ il existe $\ell \in E$ tel que $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$.

Rappelons que cette dernière écriture signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, on a la majoration

$\|f(x) - f(x_0) - (x - x_0)\ell\| \leq |x - x_0|\varepsilon$ pour tout x suffisamment voisin de x_0 .

1.1.6. Proposition : Soit $f : I \rightarrow E$ et $x_0 \in I$. On a l'implication

$$\boxed{f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0.}$$

PREUVE : En effet, on a

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)\ell + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)}_{=o_{x \rightarrow x_0}(1)} = f(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1). \quad \square$$

1.1.7. L'application $f : I \rightarrow E$ est dite **dérivable sur** I , abrégé en D^1 sur I , si f est dérivable en tout $x_0 \in I$: on note alors $D^1(I, E)$ l'ensemble (en fait le $\mathbf{K}$ -ev) des applications dérivables sur I .

L'application $f' : I \rightarrow E$, $x \mapsto f'(x)$ est alors bien définie : on la nomme **dérivée** de f .

L'application $D : D^1(I, E) \rightarrow \mathcal{F}(I, E)$, $f \mapsto f'$ s'appelle quant à elle la **dérivation** : bien faire la différence entre ces deux applications (par ex, la dérivation est linéaire, mais pas la dérivée en général) est essentiel.

Quand l'application $f' : I \rightarrow E$, $x \mapsto f'(x)$ est elle-même continue, on dit que f est **continûment dérivable sur** I , abrégé en C^1 sur I . L'expression f est C^1 en x_0 est un barbarisme.

On note $C^1(I, E)$ l'ensemble (en fait le $\mathbf{K}$ -ev) des applications C^1 sur I .

1.1.8. On dit que f est D^2 (resp. C^2) sur I si f' est elle-même D^1 (resp. C^1) et on note $f'' = (f')'$ la **dérivée seconde** de f .

Plus généralement, on peut dire que f est deux fois dérivable, ou D^2 , en x_0 si f est dérivable au voisinage de x_0 , i.e. si f' est bien définie au voisinage de x_0 , et si f' est dérivable en x_0 , sans que f' ne soit nécessairement dérivable en d'autres points que x_0 . Par contre, l'expression « f est C^2 en x_0 » est dénuée de sens.

Par récurrence sur $n \geq 1$, on dit que f est D^n (resp. C^n) sur I si f est D^{n-1} (resp. C^{n-1}) et si $f^{(n-1)}$ est elle-même D^1 (resp. C^1). On note alors $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ la dérivée n -ième de f .

On note $D^n(I, E)$ (resp. $C^n(I, E)$) l'ensemble (en fait le $\mathbf{K}$ -ev) des fonctions n fois dérivables (resp. n fois continûment dérivables) sur I .

Quand f est D^n sur I pour tout entier n , on dit que f est **lisse** ou d'ordre infini ou C^∞ et on note $C^\infty(I, E)$ l'ensemble (en fait le $\mathbf{K}$ -ev) des fonctions lisses sur I .

On montre alors par récurrence sur $n \geq 1$ que si f est D^n , alors on a $f^{(n)} := (f')^{(n-1)}$, et plus généralement que pour tous $p, q \in \mathbf{N}$ tels que $p + q \leq n$, on a $(f^{(p)})^{(q)} = (f^{(q)})^{(p)} = f^{(p+q)}$. On peut alors donner un sens à l'expression « f est n fois dérivable, ou D^n , en x_0 » : c'est quand f est $n - 1$ fois dérivable sur un voisinage de x_0 et que $f^{(n-1)}$ est elle-même dérivable en x_0 (on note alors $f^{(n)}(x_0)$ cette dérivée).

On a, grâce à la prop. 1.1.6, les inclusions $\boxed{C^{n+1}(I, E) \subset D^{n+1}(I, E) \subset D^n(I, E)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1.2. Théorèmes généraux. On garde les mêmes notations. Chaque proposition donne un résultat ponctuel (en un $x_0 \in I$), et donc chacune donne un résultat de dérivabilité globale sur I (valide en tout $x \in I$) qui n'est pas explicité.

1.2.1. Proposition : Soit

- $f : I \rightarrow E$
- f_k ($1 \leq k \leq n$) les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$ de E

On a l'équivalence

(i) f est dérivable en x_0

(ii) Pour tout $k = 1, \dots, n$, f_k est dérivable en x_0

et si tel est le cas on a $f'(x_0) = \sum_{k=1}^n f'_k(x_0)e_k$.

PREUVE : Pour $h \neq 0$, on a $\frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = \sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_0 + h) - f_k(x_0)}{h} e_k$ et on invoque la caractérisation de la limite des applications à valeurs dans un evn de dimension finie par limite des fonctions coordonnées, appliqué à $h \mapsto \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$. $\square$

Ce résultat permet de ramener le problème de dérivation des fonctions à valeurs vectorielles à celui, connu, des fonctions à valeurs scalaires.

1.2.2. Proposition : Soient

- I un intervalle non réduit à un point et $x_0 \in I$,
- $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie,
- $E = E_1 \times \dots \times E_p$,
- $f : I \rightarrow E$ une application dont on note les composantes f_k , de sorte que $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$

On a l'équivalence

(i) f est dérivable en x_0

(ii) Pour tout $k = 1, \dots, p$, f_k est dérivable en x_0

et si tel est le cas on a $f'(x_0) = (f'_1(x_0), \dots, f'_p(x_0))$.

PREUVE : Même démarche en invoquant cette fois la caractérisation de la limite des applications à valeurs dans un produit fini d'evn de dimension finie par limite des fonctions composantes. $\square$

1.2.3. Proposition : Soient

- I un intervalle non réduit à un point et $x_0 \in I$,
- E, F des $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie,
- $L : E \rightarrow F$ une application linéaire,
- $f : I \rightarrow E$

Supposons :

$\boxed{\text{hyp}}$ f est dérivable en x_0 ,

Alors

$\boxed{\text{Cl}}$ $L \circ f$ est dérivable en x_0 , avec $\boxed{(L \circ f)'(x_0) = L(f'(x_0))}$.

PREUVE : Même démarche en invoquant cette fois la caractérisation de la limite des applications à valeurs dans un produit fini d'evn de dimension finie par limite des fonctions composantes. $\square$

1.2.4. Corollaire : La dérivation est linéaire, au sens que pour toutes $f, g : I \rightarrow E$ dérivables en x_0 et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, on a $\lambda f + \mu g$ dérivable en x_0 avec $\boxed{(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)}$.

PREUVE : On introduit $L : \mathbf{K}^2 \rightarrow \mathbf{K}$, $(x, y) \mapsto \lambda x + \mu y$, qui est clairement linéaire, et $h : x \mapsto (f(x), g(x))$. La prop 1.2.3 appliquée à $L \circ h$ nous donne le résultat, puisque la prop 1.2.2 quant à elle la dérivabilité de h en x_0 avec $h'(x_0) = (f'(x_0), g'(x_0))$. $\square$

1.2.5. Proposition : Soient

- I un intervalle non réduit à un point et $x_0 \in I$,
- $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie,
- $B : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ une application p -linéaire,
- Pour tout $k = 1, \dots, p$, $f_k : I \rightarrow E_k$ une application
- $f : I \rightarrow E$ l'application définie par $f(x) = B(f_1(x), \dots, f_p(x))$

Supposons :

$\boxed{\text{hyp}}$ Pour tout k , f_k est dérivable en x_0 ,

Alors

$\boxed{\text{Cl}}$ f est dérivable en x_0 , avec $\boxed{f'(x_0) = \sum_{k=1}^p B(f_1(x_0), \dots, f_{k-1}(x_0), f'_k(x_0), f_{k+1}(x_0), \dots, f_p(x_0))}$.

PREUVE : Supposons $p = 2$ pour simplifier les notations. On travaille additivement

$$\begin{aligned} B(f_1(x_0 + h), f_2(x_0 + h)) &= B(f_1(x_0) + hf_1'(x_0) + o(h), f_2(x_0) + hf_2'(x_0) + o(h)) \\ &= B(f_1(x_0), f_2(x_0)) + hB(f_1'(x_0), f_2(x_0)) + hB(f_1(x_0), f_2'(x_0)) \\ &\quad + h^2B(f_1'(x_0), f_2'(x_0)) + B(o(h), f_2(x_0) + hf_2'(x_0) + o(h)) \\ &\quad + B(f_1(x_0) + hf_1'(x_0) + o(h), o(h)). \end{aligned}$$

Les trois derniers termes sont des $o(h)$:

- c'est clair pour $h^2B(f_1'(x_0), f_2'(x_0))$ qui est un $O(h^2)$
- La continuité de B assure l'existence d'une constante C telle que $\|B(x_1, x_2)\| \leq C\|x_1\|_1 \cdot \|x_2\|_2$, et donc pour $\varepsilon > 0$ fixé et h assez petit on a $\|B(o(h), f_2(x_0) + hf_2'(x_0) + o(h))\| \leq C\varepsilon|h| \cdot \|f_2(x_0) + hf_2'(x_0) + o(h)\|_2 \leq C'|h|\varepsilon$, ce qui montre que le 2nd terme est un $o(h)$; le 3è terme se traite de même.

Le cas général se fait par récurrence, l'initialisation pouvant se faire à $p = 2$; pour l'hérédité, on part de l'égalité

$$\begin{aligned} B(f_1(x_0 + h), \dots, f_{p+1}(x_0 + h)) &= B(f_1(x_0 + h), \dots, f_p(x_0 + h), f_{p+1}(x_0) + hf_{p+1}'(x_0) + o(h)) \\ &= B(f_1(x_0 + h), \dots, f_p(x_0 + h), f_{p+1}(x_0)) \\ &\quad + hB(f_1(x_0 + h), \dots, f_p(x_0 + h), f_{p+1}'(x_0)) \\ &\quad + \underbrace{B(f_1(x_0 + h), \dots, f_p(x_0 + h), o(h))}_{=o(h) \text{ comme cas } p=2}. \end{aligned}$$

Le 1er terme se traite par h.r. puisque l'application $(x_1, \dots, x_p) \mapsto B(x_1, \dots, x_p, f_{p+1}(x_0))$ est p -linéaire, on a donc par h.r.

$$\begin{aligned} B(f_1(x_0 + h), \dots, f_p(x_0 + h), f_{p+1}(x_0)) &= B(f_1(x_0), \dots, f_p(x_0), f_{p+1}(x_0)) \\ &\quad + h \sum_{k=1}^p B(f_1(x_0), \dots, f_k'(x_0), \dots, f_p(x_0), f_{p+1}(x_0)) + o(h) \end{aligned}$$

le 2ème se traite par continuité de B qui nous assure que

$$\begin{aligned} B(f_1(x_0 + h), \dots, f_p(x_0 + h), f_{p+1}'(x_0)) &= B(f_1(x_0), \dots, f_p(x_0), f_{p+1}'(x_0)) + o(1) \text{ et donc que} \\ hB(f_1(x_0 + h), \dots, f_p(x_0 + h), f_{p+1}'(x_0)) &= hB(f_1(x_0), \dots, f_p(x_0), f_{p+1}'(x_0)) + o(h). \end{aligned}$$

De tout ceci résulte

$$\begin{aligned} B(f_1(x_0 + h), \dots, f_{p+1}(x_0 + h)) &= B(f_1(x_0), \dots, f_{p+1}(x_0)) \\ &\quad + h \sum_{k=1}^p B(f_1(x_0), \dots, f_k'(x_0), \dots, f_p(x_0), f_{p+1}(x_0)) \\ &\quad + hB(f_1(x_0), \dots, f_p(x_0), f_{p+1}'(x_0)) + o(h) \text{ ce qui est exactement le résultat voulu au rang } p + 1. \square. \end{aligned}$$

Applications :

- Soit E un espace euclidien, $f, g : I \rightarrow E$ dérivables en x_0 , alors $h(x) = (f(x) | g(x))$ est dérivable en x_0

$$\text{avec } \boxed{h'(x_0) = (f'(x_0) | g(x_0)) + (f(x_0) | g'(x_0))}.$$

- Soit E un espace de dimension n , $\mathcal{B}$ une base de E et $f_k : I \rightarrow E$ ($1 \leq k \leq n$) des applications dérivables en x_0 , alors g définie par $g(x) = \det_{\mathcal{B}}(f_1(x), \dots, f_n(x))$ est dérivable en x_0 avec

$$\boxed{g'(x_0) = \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(f_1(x_0), \dots, f_k'(x_0), \dots, f_n(x_0))}$$

1.2.6. Proposition : Soient

- I, J des intervalles non réduits à un point
- $t_0 \in J$,

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie,
- $\varphi : J \rightarrow I$
- $f : I \rightarrow E$

Supposons :

hyp1 φ est dérivable en t_0 ,

hyp2 f est dérivable en $x_0 = \varphi(t_0)$,

Alors

Cl $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 , avec $(f \circ \varphi)'(x_0) = \varphi'(t_0)f'(\varphi(t_0))$.

PREUVE : On a d'une part $\varphi(t_0+h) = x_0 + h\varphi'(t_0) + o(h)$ ce qui donne $(f \circ \varphi)(t_0+h) = f(x_0 + h\varphi'(t_0) + o(h))$. D'autre part la dérivabilité de f fournit, $\varepsilon > 0$ étant fixé

$\|f(x_0 + h\varphi'(t_0) + o(h)) - f(x_0) - (h\varphi'(t_0) + o(h))f'(x_0)\| \leq \varepsilon|h\varphi'(t_0) + o(h)| \leq cste.\varepsilon|h|$ dès que h est suffisamment petit, ce qui assure que

$f(x_0 + h\varphi'(t_0) + o(h)) = f(x_0) + (h\varphi'(t_0) + o(h))f'(x_0) + o(h)$ (on a prouvé ici un résultat de composition de o), d'où le résultat par absorption de o . $\square$

Attention : On a parfois besoin de dériver $g \circ f$ avec $f : I \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow F$: noter que g n'est pas une fonction d'une variable réelle, c'est le cours de calcul différentiel qui donnera des hypothèses et un résultat général permettant de le faire.

1.2.7. Proposition (IAF) : Soit

- I un intervalle non réduit à un point
- $f : I \rightarrow E$

Supposons :

hyp1 f est C^1 sur I ,

hyp2 f' est bornée sur I (ce qui est automatique si I est un segment)

Alors

Cl f est lipschitzienne, et plus précisément si $k \geq 0$ est tel que $\|f'(x)\| \leq k$ pour tout $x \in I$, on a, pour tous $x, y \in I$, $\|f(x) - f(y)\| \leq k|x - y|$

PREUVE : On va prouver un résultat plus fort, sous la seule hypothèse que f est dérivable, et on verra plus loin une preuve plus directe s'appuyant sur le calcul intégral. On fixe $x_0 \in I$ et on va montrer que $\|f(x) - f(x_0)\| \leq k|x - x_0|$ pour tout $x \geq x_0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons

$I(x_0, \varepsilon) := \{x \in I \cap [x_0, +\infty[; (\forall t \in [x_0, x])(\|f(t) - f(x_0)\| \leq k|t - x_0| + \varepsilon(t - x_0))\}$. Par construction, $I(x_0, \varepsilon)$ est convexe donc est un intervalle : montrons que $I(x_0, \varepsilon) = I \cap [x_0, +\infty[$.

- Déjà, comme $\frac{1}{t-x_0}(f(t) - f(x_0))$ tend vers $f'(x_0)$ quand $t \rightarrow x_0$ et que $\|f'(x_0)\| < k + \varepsilon$, on a $t \in I(x_0, \varepsilon)$ pour $t > x_0$ assez voisin de x_0 . Ainsi $I(x_0, \varepsilon)$ n'est pas réduit à x_0 .
- On procède par l'absurde : supposons que $x_1 := \sup I(x_0, \varepsilon)$ soit dans I : comme tout $t < x_1$ est dans $I(x_0, \varepsilon)$, on aurait $\|f(t) - f(x_0)\| \leq k|t - x_0| + \varepsilon(t - x_0)$ et donc en faisant $t \rightarrow x_1$, il vient $x_1 \in I(x_0, \varepsilon)$.
- Comme ci dessus, vu que $\frac{1}{t-x_1}(f(t) - f(x_1))$ tend vers $f'(x_1)$ quand $t \rightarrow x_1$ et que $\|f'(x_1)\| < k + \varepsilon$, on a $\left\| \frac{1}{t-x_1}(f(t) - f(x_1)) \right\| \leq k + \varepsilon$ pour $t > x_1$ assez voisin de x_1 , et donc pour un tel t on a $\|f(t) - f(x_0)\| \leq \|f(t) - f(x_1)\| + \|f(x_1) - f(x_0)\|$ par IT $\leq (k + \varepsilon)(t - x_1) + (k + \varepsilon)(x_1 - x_0)$, ce qui assure que $t \in I(x_0, \varepsilon)$ pour $t > x_1$ assez voisin de x_1 , contredisant la définition de x_1 . Ainsi $I(x_0, \varepsilon) = I \cap [x_0, +\infty[$.

On a donc $\|f(x) - f(x_0)\| \leq k|x - x_0| + \varepsilon(x - x_0)$ pour tout $x \geq x_0$ dans I , et en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, on a le résultat. $\square$

Remarque si I est un segment l'hypothèse 2 est automatiquement satisfaite, par continuité de f' sur un segment.

1.2.8. Corollaire (caractérisation des fonctions constantes) : *Soit*

- I un intervalle non réduit à un point
- $f : I \rightarrow E$

Supposons :

$$\boxed{\text{hyp1}} \quad f \text{ est } C^1 \text{ sur } I,$$

$$\boxed{\text{hyp2}} \quad f' = 0 \text{ sur } I.$$

Alors

$$\boxed{\text{Cl}} \quad f \text{ est constante}$$

PREUVE : On applique l'IAF avec $k = 0$ $\square$

1.2.9. Il est commode de regrouper dans un seul énoncé la généralisation à l'ordre n des propositions précédentes. Il s'agit donc de résultats globaux, et l'on invoquera les théorèmes généraux relatifs à la dérivation à l'ordre n leur emploi. Les démonstrations consistent en des récurrences faciles que l'on ne présentera pas.

Proposition (dérivées d'ordre supérieur) : *Soit*

- $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$
- I, J des intervalles non réduits à un point
- E, F, E_i ($i = 1, \dots, p$) des $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie
- $f, g : I \rightarrow E$
- f_k ($1 \leq k \leq d$) les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$ de E
- $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$
- $L : E \rightarrow F$ linéaire
- $\varphi : J \rightarrow I$
- $h_i : I \rightarrow E_i$ ($i = 1, \dots, p$)
- $h : I \rightarrow E_1 \times \dots \times E_p$ définie par $h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x))$
- $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ bilinéaire
- $H : I \rightarrow F$ définie par $H(x) = B(h_1(x), h_2(x))$

On a alors les équivalences :

- f est D^n (resp C^n) sur $I \Leftrightarrow$ les f_k sont toutes D^n (resp C^n)
- h est D^n (resp C^n) sur $I \Leftrightarrow$ les h_k sont toutes D^n (resp C^n)

et si tel est le cas on a $f^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^d f_i^{(n)}(x)e_i$ et $h^{(n)}(x) = (h_1^{(n)}(x), \dots, h_p^{(n)}(x))$ respectivement.

De plus, si l'on suppose

$$\boxed{\text{hyp}} \quad f, g, h_1, h_2, \varphi \text{ de classe } D^n \text{ (resp } C^n) \text{ sur } I \text{ ou } J.$$

Alors

$$\boxed{\text{Cl1}} \quad L \circ f \text{ est également } D^n \text{ (resp } C^n) \text{ sur } I \text{ avec } (L \circ f)^{(n)} = L \circ f^{(n)},$$

$$\boxed{\text{Cl2}} \quad \lambda f + \mu g \text{ est également } D^n \text{ (resp } C^n) \text{ sur } I \text{ avec } (\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)},$$

$$\boxed{\text{Cl3}} \quad H \text{ est également } D^n \text{ (resp } C^n) \text{ sur } I \text{ avec } H^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(h_1^{(k)}(x), h_2^{(n-k)}(x)),$$

$$\boxed{\text{Cl4}} \quad f \circ \varphi \text{ est également } D^n \text{ (resp } C^n) \text{ sur } I.$$

2 Intégration.

Il s'agit de donner un sens à $\int_a^b f(x) dx$ pour $f : I \rightarrow E$ suffisamment régulière. On pourrait reprendre à zéro la construction de l'intégrale de Darboux-Riemann vue en sup, mais il faudrait contourner l'absence de relation d'ordre sur E (l'ordre naturel de $\mathbf{R}$ est omniprésent dans le cas des fonctions à valeurs réelles), ce qui conduit à des complications théoriques. Il est plus simple, mais moins intrinsèque a priori, de s'appuyer sur les fonctions coordonnées.

2.1. Définitions. On conserve les notations transversales : en particulier, E est un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie (sans quoi, tout s'effondre vraiment sans hypothèse supplémentaire de complétude).

2.1.1. Définition. Soit $f : [a, b] \rightarrow E$. On dit que f est continue par morceaux (C_{pm}) sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i = 0, \dots, n-1$ la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ se prolonge en un fonction continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, en d'autres termes si pour tout $i = 0, \dots, n-1$:

- (i) la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
- (ii) f possède une limite à droite (resp à gauche) finie en x_i (resp x_{i+1})

2.1.2. Définition. Soit I un intervalle quelconque et $f : I \rightarrow E$. On dit que f est continue par morceaux (C_{pm}) sur I si la restriction de f à tout segment de I est C_{pm} au sens de la définition précédente. On note $C_{pm}(I, E)$ l'ensemble (en fait l'espace) des fonctions C_{pm} sur I .

On a l'inclusion $C^0(I, E) \subset C_{pm}(I, E)$.

2.1.3. Attention! La régularité de type continuité par morceaux est peu stable vis à vis des opérations naturelles. En particulier

- la composée de deux applications C_{pm} peut ne pas être C_{pm} (prendre $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ et $g =$ fonction indicatrice de $\mathbf{R}_+$: $g \circ f$ a un problème en 0) – on verra plus bas que si g est en fait continue, la composée $g \circ f$ demeure C_{pm} ,
- le prolongement par continuité de $f :]a, b[\rightarrow E$ supposée C_{pm} à $[a, b]$ peut ne pas être C_{pm} (prendre $f :]0, 1[$ valant $\frac{1}{n}$ sur $] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} [$: f se prolonge par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = 0$, mais $\tilde{f}$ n'est pas C_{pm} sur $[0, 1]$ car infinité de discontinuités sur $[0, 1]$).
- Une suite de fonctions C_{pm} convergeant uniformément n'a pas nécessairement sa limite C_{pm} (prendre f_n valant $\frac{1}{k}$ sur $] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} [$ pour $k = 1, \dots, n$ et nulle sur $[0, \frac{1}{n+1}]$: chaque f_n est C_{pm} et (f_n) CvU vers la f précédente).

2.1.4. Proposition : Soient

- $f : I \rightarrow E$
- f_k ($1 \leq k \leq n$) les fonctions coordonnées de f dans une base $\mathcal{B}$ de E

On a l'équivalence

- (i) f est C_{pm} sur I
- (ii) Pour tout $k = 1, \dots, n$, f_k est C_{pm} sur I

PREUVE : On fixe $J \subset I$ un segment.

Le sens (i) $\Rightarrow$ (ii) ne pose pas problème car une subdivision adaptée à la restriction de f à J l'est automatiquement à ses coordonnées (du fait que f possède une limite en un point si et seulement si ses fonctions coordonnées aussi).

Pour la réciproque, on fixe σ_k une subdivision adaptée à (la restriction de) f_k , et l'on considère une subdivision σ plus fine que toutes les σ_k , par exemple celle obtenue en prenant, et réordonnant, tous les points de toutes les σ_k . On vérifie par le même argument que cette subdivision est adaptée à (la restriction de) f (à J). $\square$

2.1.5. Proposition : Soient

- $E, E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- $f : I \rightarrow E$
- $f_k : I \rightarrow E_k$ ($1 \leq k \leq n$),
- $g : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ une application.

Supposons

$\boxed{\text{hyp1}}$ f et les f_k toutes C_{pm} sur I .

$\boxed{\text{hyp2}}$ g continue

Alors

$\boxed{\text{Cl1}}$ l'application $x \mapsto g(f_1(x), \dots, f_p(x))$ est C_{pm} sur I ,

$\boxed{\text{Cl2}}$ l'application $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$ est C_{pm} sur I ,

$\boxed{\text{Cl2}}$ la restriction de f à tout segment inclus dans I est bornée.

PREUVE : Pour le premier point, on fixe un segment $J \subset I$ une subdivision σ adaptée à toutes les restrictions des f_k sur J , par exemple celle obtenue en choisissant une subdivision σ_k adaptée à (la restriction de) f_k et en faisant la réunion des points des σ_k : la continuité de g assure que σ est adaptée à la restriction de $g \circ (f_1, \dots, f_p)$. Le second point se montre de même.

Pour le troisième point, on prend $g = \|\cdot\|$, $p = 1$ et $f_1 = f$: le 1er point assure que $g \circ f$ est C_{pm} sur I , à valeurs dans $\mathbf{R}$, donc bornée sur tout segment d'après le cours de sup. $\square$

2.2. La définition de l'intégrale. Soient

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ,
- $f : [a, b] \rightarrow E$ une application C_{pm}
- f_k ($1 \leq k \leq n$) les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$.

On souhaiterait définir $\int_a^b f(x) dx := \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right) e_k$ mais cette définition dépend *a priori* du choix de la base $\mathcal{B}$.

Soit donc $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une autre base de E , φ_k ($1 \leq k \leq n$) les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{C}$ et montrons que $\sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right) e_k = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b \varphi_k(x) dx \right) \varepsilon_k$.

La formule de changement de base assure l'existence de scalaires $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ tels que $\varepsilon_k = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell,k} e_\ell$ pour tout k , de telle sorte qu'en notant $P = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ on ait $[x]_{\mathcal{B}} = P[x]_{\mathcal{C}}$ et donc

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^n \left(\int_a^b f_\ell(x) dx \right) e_\ell &= \sum_{\ell=1}^n \left(\int_a^b \sum_{k=1}^n a_{\ell,k} \varphi_k(x) dx \right) e_\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n a_{\ell,k} \left(\int_a^b \varphi_k(x) dx \right) e_\ell \text{ par linéarité de l'intégrale scalaire} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b \varphi_k(x) dx \cdot \underbrace{\sum_{\ell=1}^n a_{\ell,k} e_\ell}_{=\varepsilon_k} \right) \text{ par Fubini-sommes finies, d'où} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{\ell=1}^n \left(\int_a^b f_\ell(x) dx \right) e_\ell = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b \varphi_k(x) dx \right) \varepsilon_k.}$$

On peut donc légitimement définir $\int_a^b f(x) dx := \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right) e_k$, avec les variantes habituelles

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f.$$

Exemple concret : Soit $t \in [a, b] \mapsto M(t) \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une application à valeurs matricielles, C_{pm} : la matrice $\int_a^b M(t) dt$ est la matrice dont le coeff i, j vaut $\int_a^b M_{i,j}(t) dt$.

2.3. Théorèmes généraux.

2.3.1. Proposition (sommes de Riemann) : Soit

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- $f : [a, b] \rightarrow E$,

Supposons

$\boxed{\text{hyp}}$ $f \in C_{pm}([a, b], E)$.

On a alors

$$\boxed{\text{Cl}}$$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f$

PREUVE : On fixe une base $\mathcal{B}$ de E : pour toute fonction coordonnée f_k de f on a

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f_k$ par le cours de sup, d'où le résultat par caractérisation coordonnée par coordonnée de la convergence en dimension finie. $\square$

2.3.2. Corollaire (IT) : Avec les mêmes notations et hypothèses, on a pour toute norme $\|\cdot\|$ sur E

$$\text{l'inégalité triangulaire intégrale } \left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$$

PREUVE : Fixons $n \geq 1$. On a

$\left\| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right\| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right\|$ par IT et en faisant $n \rightarrow \infty$, le résultat vient par passage à la limite dans les inégalités, par convergence des sommes de Riemann. $\square$

2.3.3. Convenons de poser $\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$ si $b < a$ et de toujours noter f les diverses restrictions de f aux segments de I . On a alors

Proposition (relation de Chasles) : Soit

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- I intervalle de $\mathbf{R}$ et $a, b, c \in I$,
- $f : I \rightarrow E$,

Supposons

$$\boxed{\text{hyp}} \quad f \in C_{pm}(I, E).$$

On a alors

$$\boxed{\text{Cl}} \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

PREUVE : En fixant une base de E , la relation de Chasles vue en sup donne l'égalité pour les coordonnées, et par combinaison linéaire le résultat vient. $\square$

2.3.4. Proposition (linéarité) : Soit

- E, F des $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- $f : I \rightarrow E$,
- $L : E \rightarrow F$

Supposons

$$\boxed{\text{hyp1}} \quad f \in C_{pm}(I, E),$$

$$\boxed{\text{hyp2}} \quad L \text{ linéaire.}$$

On a alors

$$\boxed{\text{Cl}} \quad \int_a^b (L \circ f) = L \left(\int_a^b f \right)$$

PREUVE : Fixons $n \geq 1$. On a

$$L \left(\underbrace{\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + \frac{k}{n}(b-a) \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f} \right) = \underbrace{\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} L \left(f \left(a + \frac{k}{n}(b-a) \right) \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b (L \circ f)} \text{ par linéarité de } L, \text{ et le résultat vient}$$

par unicité de la limite et sommes de Riemann. $\square$

2.3.5. Corollaire (applications à valeurs dans un produit) : Soit

- $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- pour tout $k = 1, \dots, p$, $f_k \in C_{pm}([a, b], E_k)$,
- $f : [a, b] \rightarrow E_1 \times \dots \times E_p$ l'application de coordonnées les f_k

On a alors

$$\boxed{\text{Cl}} \quad \int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_p \right)$$

PREUVE : Notons $E = E_1 \times \dots \times E_p$. On a $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ pour tout x et il s'agit de montrer que la k -ième composante du vecteur $\int_a^b f$ de E vaut $\int_a^b f_k$. Or en notant $\pi_k : E \rightarrow E_k$, π_k l'application k -ième composante, π_k est linéaire, donc la proposition 2.3.4 donne $\pi_k \left(\int_a^b f \right) = \int_a^b \underbrace{\pi_k \circ f}_{=f_k}$, ce qui est le résultat voulu. $\square$

2.3.6. Corollaire (linéarité) : *Soit*

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- $f, g \in C_{pm}([a, b], E)$,
- $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$,

On a alors

$$\boxed{C\ell} \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

PREUVE : C'est une conséquence de la prop 2.3.4 et du corollaire précédent en prenant $L : \mathbf{K}^2 \rightarrow \mathbf{K}$, $(x, y) \mapsto \lambda x + \mu y$. $\square$

2.4. Lien avec la dérivation. Il s'agit de généraliser le théorème fondamental de l'analyse, ou théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, et ses conséquences.

2.4.1. théorème (TFA) : *Soit*

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- I intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et $a \in I$,
- $f : I \rightarrow E$,

Supposons

$$\boxed{hyp} f \text{ continue sur } I,$$

Alors

$$\boxed{C\ell 1} F_a : x \mapsto \int_a^x f \text{ est une primitive de } f \text{ et c'est l'unique primitive de } f \text{ s'annulant en } a.$$

$$\boxed{C\ell 2} \text{ Pour toute primitive } F \text{ de } f \text{ sur } I \text{ on a } \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

PREUVE : Fixons une base de E : le TFA vu en sup assure que les fonctions coordonnées de F_a sont des primitives, donc par la prop 1.2.1 F_a est bien une primitive de f . Le reste suit, puisque deux primitives quelconques de f sur l'intervalle I diffèrent d'une constante (la dérivée de la différence étant nulle sur I) $\square$

2.4.2. Application : autre preuve de l'IAF. Dans le cas de $f : I \rightarrow E$ continûment dérivable, on a donc $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$, et donc par IT

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} \|f'(t)\| dt \leq k|b - a| \text{ si } k \text{ majore } \|f'\|, \text{ par croissance de l'intégrale.}$$

2.4.3. Théorème (IPP) : *Soit*

- E_1, E_2, F des $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- I intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et $a, b \in I$,
- Pour $i = 1, 2$ $f_i : I \rightarrow E_i$,
- $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ une application.

Supposons

$$\boxed{hyp1} f_1, f_2 \text{ continûment dérivables sur } I,$$

$$\boxed{hyp2} B \text{ bilinéaire.}$$

Alors

$$\boxed{C\ell} \int_a^b B(f_1'(t), f_2'(t)) dt = \left[B(f_1(t), f_2(t)) \right]_a^b - \int_a^b B(f_1(t), f_2'(t)) dt.$$

PREUVE : En effet, $t \mapsto B(f_1(t), f_2(t))$ est une primitive de $t \mapsto B(f_1'(t), f_2(t)) + B(f_1(t), f_2'(t))$ $\square$

2.4.4. Théorème (Changement de variable) : *Soit*

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- I, J intervalles de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et $\alpha, \beta \in J$,
- $f : I \rightarrow E$,
- $\varphi : J \rightarrow I$ une application.

Supposons

$$\boxed{hyp1} f \text{ continue par morceaux sur } I,$$

$$\boxed{hyp2} \varphi \text{ continûment dérivable.}$$

Alors

$$\boxed{\text{Cl}} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt.$$

PREUVE : En effet, $x \mapsto \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(u) du$ et $x \mapsto \int_{\alpha}^x f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ ont même dérivée par TFA et sont égales en $x = \alpha$, donc partout. $\square$

2.4.5. Théorème (formule de Taylor-Lagrange) : *Soit*

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- I un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et $a, b \in I$,
- $f : I \rightarrow E$,
- $n \in \mathbf{N}$,

Supposons

$$\boxed{\text{hyp}} f \text{ de classe } C^{n+1} \text{ sur } I,$$

Alors

$$\boxed{\text{Cl}} f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}((1-u)a + ub) du.$$

PREUVE : On procède par récurrence sur n , le cas $n = 0$ étant le TFA, l'hérédité consistant à une IPP pratiquée avec $B : \mathbf{K} \times E \rightarrow E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ avec $f_1(t) = \frac{(b-t)^{n+1}}{n!}$ et $f_2(t) = f^{(n)}(t)$. On peut aussi constater l'égalité des fonctions coordonnées. $\square$

2.4.6. Corollaire (inégalité de Taylor-Lagrange) : *Soit*

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- I un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et $a, b \in I$,
- $f : I \rightarrow E$,
- $n \in \mathbf{N}$,
- $M_{n+1} \in \mathbf{R}$,

Supposons

$$\boxed{\text{hyp1}} f \text{ de classe } C^{n+1} \text{ sur } I,$$

$$\boxed{\text{hyp2}} \|f^{(n+1)}(t)\| \leq M_{n+1} \text{ pour tout } t \text{ situé entre } a \text{ et } b.$$

Alors

$$\boxed{\text{Cl}} \left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}.$$

PREUVE : L'égalité de Taylor Lagrange suivie de l'IT donne

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| = \left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right\| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} \frac{(b-t)^n}{n!} \|f^{(n+1)}(t)\| dt$$

puis en majorant $\|f^{(n+1)}(t)\|$ par M_{n+1} , la croissance de l'intégrale donne l'inégalité voulue. $\square$

2.4.7. Théorème (formule de Taylor-Young) : *Soit*

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- I un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et $a, b \in I$,
- $f : I \rightarrow E$,
- $n \in \mathbf{N}$,

Supposons

$$\boxed{\text{hyp}} f \text{ de classe } C^n \text{ sur } I,$$

Alors

$$\boxed{\text{Cl}} f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n).$$

PREUVE : Supposons plutôt que f est C^{n+1} . L'inégalité de Taylor-Lagrange montre qu'alors $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = O_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1})$. Si l'on veut vraiment prouver le résultat plus fort donné dans l'énoncé, on procède par récurrence sur n , et l'on s'appuie sur le

Lemme : Soit $\varphi \in C^1([a, b], E)$ telles que $\varphi'(x) = o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$, alors on a

$$\varphi(x) - \varphi(a) = o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1})$$

qui se prouve en écrivant $\|\varphi(x) - \varphi(a)\| = \left\| \int_a^x \varphi' \right\| \leq \int_a^x \|\varphi'\| \leq \varepsilon \int_a^x (t-a)^n dt$ dès que x est assez proche de a .

On applique alors le lemme avec $\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$. $\square$

3 Suites et séries de fonctions à valeurs vectorielles.

3.1. Théorème (Primitivation et CvU). Soit

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- I un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et $a \in I$,
- $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ suite de $C^0(I, E)$,
- $f : I \rightarrow E$.

Supposons

$$\boxed{\text{hyp}} (f_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ CvU sur tout segment de } I \text{ vers } f,$$

Alors

$$\boxed{\text{Cl1}} f \text{ est continue sur } I \text{ et en posant } F_n(x) = \int_a^x f_n \text{ et } F(x) = \int_a^x f,$$

$$\boxed{\text{Cl2}} (F_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ CvU sur tout segment de } I \text{ vers } F.$$

PREUVE : Le premier point vient du cours sur les evn : la CvU locale préserve la continuité.

Pour le second, soit $J = [\alpha, \beta]$ un segment de I , et $J' = [\alpha', \beta']$ un segment de I contenant à la fois J et a , par ex $J' = [a, \beta] \cup [\alpha, a]$. Pour $x \in J'$, on a

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_a^x (f_n - f) \right| \leq \int_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\leq \|f_n - f\|_{\infty, J'}} dt \leq \|f_n - f\|_{\infty, J'} \times (\beta' - \alpha'), \text{ qui est un majorant}$$

indépendant de x tendant vers 0 avec n , d'où le résultat. $\square$

Le même Théorème, version série de fonctions. Soit

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- I un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et $a \in I$,
- $\sum u_n$ série de $C^0(I, E)$,

Supposons

$$\boxed{\text{hyp}} \sum u_n \text{ CvU sur tout segment de } I,$$

Alors

$$\boxed{\text{Cl1}} f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ est continue sur } I \text{ et en posant } U_n(x) = \int_a^x u_n \text{ et } F(x) = \int_a^x f,$$

$$\boxed{\text{Cl2}} \sum U_n \text{ CvU sur tout segment de } I \text{ vers } F.$$

3.2. Corollaire. Mêmes notations en prenant $I = [a, b]$. Supposons

$$\boxed{\text{hyp}} (f_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ CvU vers } f \text{ sur } I,$$

Alors

$$\boxed{\text{Cl}} \int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f,$$

Le même Théorème, version série de fonctions. Soit

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- $I = [a, b]$,
- $\sum u_n$ série de $C^0(I, E)$,

Supposons

$$\boxed{\text{hyp}} \sum u_n \text{ CvU sur tout segment de } I,$$

Alors

$\boxed{Cl}$ la série de terme général $\int_a^b u_n$ converge dans E avec $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n$

3.3. Théorème (Dérivabilité à l'ordre p et CvU). Soit

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- I un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point,
- $p \in \mathbf{N}$,
- $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ suite de $C^p(I, E)$,
- pour tout $k = 0, \dots, p$, $g_k : I \rightarrow E$.

Supposons

$\boxed{hyp1}$ Pour tout $k = 0, \dots, p-1$, $(f_n^{(k)})_n$ CvS vers g_k ,

$\boxed{hyp2}$ $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbf{N}}$ CvU sur tout segment de I vers g_p

Alors

$\boxed{Cl1}$ g_0 est de classe C^p sur I et

$\boxed{Cl2}$ Pour tout $k = 0, \dots, p$, $g_0^{(k)} = g_k$.

$\boxed{Cl3}$ De plus, $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbf{N}}$ CvU sur tout segment de I vers g_k pour tout $k = 0, \dots, p$.

PREUVE : On procède par récurrence sur p , et il n'y a rien à démontrer pour $p = 0$. Supposons donc le résultat prouvé pour le rang p et supposons que (f_n) soit une suite de fonctions satisfaisant ces hypothèses au rang $p+1$.

• Montrons d'abord que $(f_n^{(p)})$ CvU sur tout segment de I vers g_p : en notant $h_n = f_n^{(p+1)}$, on a $f_n^{(p)}(x) = f_n^{(p)}(a) + H_n(x)$, avec $H_n(x) = \int_a^x h_n$ (a étant un point quelconque fixé de I) et le théorème de primitivation des suites de fonctions assure que (H_n) CvU sur tout segment de I vers $H(x) = \int_a^x f^{(p+1)}$. Du coup, pour tout $J \subset I$ segment, on a

$\|f_n^{(p)} - (f^{(p)}(a) + H)\|_{\infty, J} \leq \|f^{(p)}(a) - f_n^{(p)}(a)\| + \|H_n - H\|_{\infty, J}$ qui tend vers 0. ceci démontre donc que $(f_n^{(p)})$ CvU sur tout segment de I vers $f^{(p)}(a) + H$. Mais comme par hyp, $(f_n^{(p)})$ CvS vers g_p , on a $f^{(p)}(a) + H = g_p$, ce qui assure $\boxed{\text{la CvU de } (f_n^{(p)}) \text{ sur tout segment de } I \text{ vers } g_p}$.

• L'hyp de récurrence s'applique donc, puisqu'on sait désormais que $(f_n^{(p)})$ CvU sur tout segment de I vers g_p , et donne les égalités, pour tout $k = 0, \dots, p$, $g_0^{(k)} = g_k$.

• Enfin l'égalité $f^{(p)}(a) + H = g_p$ assure par TFA que g_p est C^1 de dérivée $f^{(p+1)}$, et on en déduit donc enfin que $\boxed{g_0 \text{ est de classe } C^{p+1} \text{ avec pour tout } k = 0, \dots, \text{ jusqu'à } p+1, g_0^{(k)} = g_k}$. $\square$

3.4. Corollaire (Dérivabilité à l'ordre infini et CvU). Soient

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- I un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point,
- $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ suite de $C^\infty(I, E)$,
- pour tout $p \in \mathbf{N}$, $g_p : I \rightarrow E$.

Supposons

$\boxed{hyp}$ Pour tout $p \in \mathbf{N}$, $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbf{N}}$ CvU sur tout segment de I vers g_p

Alors

$\boxed{Cl1}$ g_0 est de classe C^∞ sur I et

$\boxed{Cl2}$ Pour tout $p \in \mathbf{N}$, $g_0^{(p)} = g_p$.

L'hypothèse peut être légèrement affaiblie, mais en pratique celle n'est pas très utile : il suffit de supposer l'existence d'une extraction $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $(f_n^{(\varphi(p))})$ CvU sur tout segment de I vers $g_{\varphi(p)}$, et la CvS sur I de $(f_n^{(k)})_n$ vers g_k pour tout k . C'est de toute façon hors programme tel quel, il faudrait justifier cela au cas par cas en menant une récurrence à partir du théorème précédent.

3.4.1. Les mêmes Théorèmes, version série de fonctions. *Soit*

- E un $\mathbf{K}$ -ev de dim finie,
- I un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et $a \in I$,
- $p \in \mathbf{N}^*$ (resp $p = \infty$),
- $\sum u_n$ série de $C^p(I, E)$,

Supposons

$\boxed{\text{hyp1}}$ Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\left(\sum u_n^{(k)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ CvS sur I (resp. pas d'hyp1),

$\boxed{\text{hyp2}}$ $\left(\sum u_n^{(p)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ CvU sur tout segment de I (resp pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\left(\sum u_n^{(k)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ CvU sur tout segment de I).

Alors

$\boxed{\text{Cl1}}$ $f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est p fois continûment dérivable (resp. lisse) sur I ,

$\boxed{\text{Cl2}}$ pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ (resp. pour tout $k \in \mathbf{N}$), $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}$

$\boxed{\text{Cl3}}$ pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $\left(\sum u_n^{(k)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ CvU sur tout segment de I .