Fonctions définies par une intégrale

1. Thm de convergence dominée (version paramètre continu)

Cadre : • E evn, $A \subset E$, x_0 adhérent à A (éventuellement $x_0 = \infty$ si A non bornée, ou $x_0 = \pm\infty$ si $E = \mathbb{R}$ et A non majorée ou minorée)
- I intervalle non trivial
- $f : A \times I \to \mathbb{K}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$
- $g : I \to \mathbb{K}$

Thm 1-(de convergence dominée à paramètre continu)

Supposons (hyp1) $\forall t \in I \quad f(x,t) \xrightarrow[x \to x_0]{} g(t)$

(hyp2) g C^0_{pm} et $\forall x \in A$ $f(x,\cdot) : t \mapsto f(x,t)$ C^0_{pm} sur I

(hyp3) [domination locale en x_0] il existe $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ et $\varphi = \varphi_V$ intégrable sur I telle que
$$\forall x \in V \cap A \ \forall t \in I \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors, en notant $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$

(C1) g est intégrable sur I

(C2) $F(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \int_I g(t)\,dt$

Preuve : • D'abord $f(x,\cdot)$ et g sont intégrables par hyp $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ (1) pour $f(x,\cdot)$, et par passage à la lim. $x \to x_0$ pour g puisque (1) donne $|g(t)| = \lim\limits_{x \to x_0} |f(x,t)| \leq \varphi(t)$ à $t \in I$ fixé.

• Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de A tq $x_n \xrightarrow[n\infty]{} x_0$. Mq $F(x_n) \to \int_I g$ (cela suffira par caract. séq. de la limite)

Notons $g_n(t) := f(x_n, t)$. On a

(1) $g_n \xrightarrow{CVS} g$ par hyp 1

(2) g est C^0_{pm}

(3) $|g_n(t)| = |f(x_n,t)| \leq \varphi(t)$ APCR ($x_n \in V$ pour n assez grand)

Par thm de convergence dominée (séquentiel) on a $\int_I g_n(t)\,dt \xrightarrow[n\infty]{} \int_I g$

soit exactement $F(x_n) \to \int_I g$. cqfd

2. Thm de continuité des intégrales à paramètres

Cadre : • cf §1 sauf :
• ici $x_0 \in A$

Thm 2. (C^0 des fct définies par une intégrale)

Supposons (hyp1) $\forall t \in I \quad f(\cdot,t) : x \mapsto f(x,t)$ C^0 en x_0

(hyp2) $\forall x \in A \quad f(x,\cdot) : t \mapsto f(x,t)$ C^0_{pm} sur I

(hyp3) (domination locale) il existe $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ et $\varphi = \varphi_V$ intégrable sur I telle que
$\forall x \in V \cap A \ \forall t \in I \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$

Alors (cl) $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est C^0 en x_0.

Preuve : c'est le thm 1, en prenant $g(t) = f(x_0,t)$. cqfd

cor – (C^0 globale des intégrales à paramètre)

Supposons (hyp1) $\forall t \in I \quad f(\cdot,t)$ C^0 sur A.

(hyp2) $\forall x \in A \quad f(x,\cdot)$ C^0_{pm} sur I

(hyp3) (domination locale sur A) Pour tout $x_0 \in A$ il existe $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ et $\varphi = \varphi_{V_0}$ intégrable sur I telle que $\forall x \in A \cap V_0 \ \forall t \in I \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$

Alors (cl) $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est C^0 sur A.

Preuve : F C^0 sur $A \iff F$ C^0 en tout $x_0 \in A$. qed.

Remarques : en situation pratique

① $A = E$: pour tout $x_0 \in E$, $\overline{B}(0,R) \in \mathcal{V}_{x_0}$ pour R assez grand.
Pour appliquer le cor du thm 2, il suffit de mq pour tout $R > 0$ il existe $\varphi = \varphi_R$ telle que $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ pour tous $x \in \overline{B}(0,R)$, $t \in I$ (avec φ intégrable).

② $A = J$ intervalle : tout $[a,b]$ tel que $x_0 \in]a,b[$ (resp. $x_0 \in [a,b[$, $x_0 \in]a,b]$) est un voisinage de x_0 (resp. un voisinage à droite, à gauche)
Pour appliquer le cor du thm 2, il suffit de mq pour tout $[a,b] \subset J$ il existe $\varphi = \varphi_{a,b}$ intégrable telle que
$\forall x \in [a,b] \ \forall t \in I \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$

3. Thm de dérivabilité des intégrales à paramètre

Cadre : . $E = \mathbb{R}$

. $A = J$ = intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial

. m̂ I, $f(x,t)$

Notation : . Lorsque $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{D}^1$ en $x_0 \in I$, ou sur I, on note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$ ou $\partial_1 f(x_0,t)$ sa dérivée en x_0 (et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ ou $\partial_1 f(x,t)$ lorsque $x \in I$ est quelconque)

. Lorsque $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{D}^k$ en $x_0 \in I$, ou sur J, on note $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x_0,t)$ ou $\partial_1^k f(x_0,t)$ sa dérivée k-ième en x_0 (et donc $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ ou $\partial_1^k f(x,t)$ en $x \in J$ quelconque)

Thm 3 (dérivabilité des fonctions définies par une intégrale)

Supposons (hyp1) $\forall t \in I \quad f(\cdot,t) : x \mapsto f(x,t) \quad C^1$ sur J

(hyp2) $\forall x \in J \quad f(x,\cdot)$ et $\partial_1 f(x,\cdot) \quad C^0_{pm}$ sur I

(hyp3) $\forall x \in J \quad f(x,\cdot)$ intégrable sur I

(hyp4) (domination locale de la dérivée) Pour tout $[a,b] \subset J$ il existe $\varphi = \varphi_{a,b}$ intégrable sur I telle que $\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in I \quad |\partial_1 f(x,t)| \leq \varphi(t)$

Alors (Cl) $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est C^1 sur J avec pour tout $x \in J$

$$F'(x) = \int_I \partial_1 f(x,t)\,dt$$

Preuve : Soit $x_0 \in J$ fixé. Pour h assez petit (éventuellement en imposant $h > 0$ ou < 0 selon que x_0 est l'extrémité gauche ou droite de J) on a $x_0 + h \in J$. On peut donc considérer pour de tels $h \neq 0$

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \int_I \frac{f(x_0+h,t) - f(x_0,t)}{h}\,dt$$

On pose alors $g(h,t) = \frac{1}{h}\left(f(x_0+h,t) - f(x_0,t)\right)$ et on applique le thm1 lorsque $h \to 0$. On a

- $g(h,t) \xrightarrow[h\to 0]{} \partial_1 f(x_0,t)$ par déf. de la dérivée
- $\partial_1 f(x_0,\cdot) \quad C^0_{pm}$.
- Pour $\alpha > 0$ assez petit tq $[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \subset J$ (resp $[x_0, x_0+\alpha]$ ou $[x_0-\alpha, x_0] \subset J$) on a par inégalité des accroissements finis

pour tout $h \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$ et tout $t \in I$

$$|g(h,t)| = \frac{1}{|h|} \, | f(x_0+h, t) - f(x_0,t) | \leq \sup_{x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \cap J} |\partial_1 f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

φ venant de hyp 4 avec $[a,b] = [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \cap J$.

Le thm. de convergence dominée s'applique et donne la dérivabilité de F en x_0.
Le caractère C^1 vient de la C^0 de F', immédiate en appliquant le cor du thm 2 à F', vu l'hyp 4. cqfd.

Remarque : L'hyp 3 a servi seulement pour assurer la bonne définition de F sur J (oubliée dans la preuve ci dessus...)

Cor1 – (dérivation à l'ordre p)

Supposons
- hyp1 $\forall t \in I$ $f(\cdot, t)$ C^p sur I
- hyp2 $\forall x \in J$ $\forall k \in [\![0,p]\!]$ $\partial_1^k f(x, \cdot)$ C^0_{pm} sur I
- hyp3 $\forall x \in J$ $\forall k \in [\![0,p-1]\!]$ $\partial_1^k f(x, \cdot)$ intégrable sur I
- hyp3 (domination locale de l'ultime dérivée)
  Pour tout $[a,b] \subset J$ il existe $\varphi = \varphi_{a,b,p}$ intégrable sur I telle que $\forall x \in [a,b]$ $\forall t \in I$
  $$|\partial_1^p f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est C^p sur J et pour tous $x \in J$ et tout $k \in [\![0,p]\!]$ $\quad F^{(k)}(x) = \int_I \partial_1^k f(x,t)\,dt$

Preuve : • par réc sur p, le cas $p=1$ est le thm3

• $p \to p+1$. Soit $f(x,t)$ satisfaisant les hyp 1 à 4 avec $p+1$ à la place de p. Pour appliquer l'h.r., montrons l'hyp de domination (locale) pour la dérivée d'ordre p, $\partial_1^p f(x,t)$, sur tout $[a,b] \subset J$. Pour cela, on écrit pour $x \in [a,b]$

$$|\partial_1^p f(x,t)| = |\partial_1^p f(x,t) - \partial_1^p f(a,t) + \partial_1^p f(a,t)|$$
$$\leq |\partial_1^p f(x,t) - \partial_1^p f(a,t)| + |\partial_1^p f(a,t)|$$

Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à $x \mapsto \partial_1^p f(x,t)$ on a
$$|\partial_1^p f(x,t) - \partial_1^p f(a,t)| \leq \sup_{\xi \in [a,b]} |\partial_1^{p+1} f(\xi,t)| \times |x-a| \leq \varphi(t) \cdot (b-a)$$
où $\varphi = \varphi_{a,b,p}$ domine $\partial_1^{p+1} f(x,t)$ pour $x \in [a,b]$ (par hyp4 appliquée à $\partial_1^{p+1} f(x,t)$). On a donc pour $x \in [a,b]$ et $t \in I$

$$|\partial_1^p f(x,t)| \leq (b-a)\,\varphi(t) + |\partial_1^p f(a,t)|,$$ intégrable sur I par hyp 3 & 4

L'h.r. s'applique donc à $f(x,t)$ et assure que F est C^p sur J avec

$\forall k \in [\![0,p]\!] \quad F^{(k)}(x) = \int_I \partial_1^k f(x,t)\,dt$. (1)

Enfin, le thm 3 s'applique à $x \mapsto F^{(p)}(x)$, puisque la dérivée de $x \mapsto \partial_1^p f(x,t)$ est $\partial_1^{p+1} f(\cdot,t)$ qui est dominée par l'hyp4, et donc $F^{(p)}$ est C^1, soit encore F est C^{p+1}, sur J, avec (1) vraie avec $k=p+1$. cqfd

Cor 2 – (dérivation à l'ordre infini)

Supposons hyp1 $\forall t \in I \quad f(\cdot,t)$ C^∞ sur J

hyp2 $\forall x \in J \ \forall k \in \mathbb{N} \quad \partial_1^k f(x,\cdot)$ C^0_{pm} sur I.

hyp3 (domination locale de toutes les dérivées)

Pour tout $[a,b] \subset J$ et tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $\varphi = \varphi_{a,b,k}$ intégrable sur I telle que

$\forall x \in [a,b] \ \forall t \in I \quad |\partial_1^k f(x,t)| \leq \varphi(t)$

Alors Cl $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est C^∞ sur J et pour tous $x \in J$ et $k \in \mathbb{N}$ on a $F^{(k)}(x) = \int_I \partial_1^k f(x,t)\,dt$

Preuve – une récurrence évidente sur p montre que F est C^p sur J pour tout $p \in \mathbb{N}$. cqfd

Ex d'illustration : Γ définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ est C^∞

On pose $f(x,t) = t^{x-1} e^{-t}$

- $f(\cdot,t)$ est C^∞ sur $J = \mathbb{R}_+^*$ avec $\partial_1^k f(x,t) = (\text{Log}\, t)^k\, t^{x-1} e^{-t}$
- Chaque $\partial_1^k f(x,\cdot)$ est C^0_{pm} sur $I = \mathbb{R}_+^*$ (car C^0...)
- On fixe $0<a<b$ et on domine $\partial_1^k f(x,t)$ pour $x \in [a,b]$

$x \mapsto t^x$ est $\nearrow$ si $t \in [1,+\infty[$, $\searrow$ si $t \in]0,1]$

Pour $x \in [a,b]$ on a donc $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ si $t \in]0,1]$ et $t^{x-1} \leq t^{b-1}$ si $t \geq 1$

Donc en posant $\varphi(t) = |\text{Log}\, t|^k\, t^{a-1} e^{-t}$ si $t \in]0,1]$, $|\text{Log}\, t|^k\, t^{b-1} e^{-t}$ si $t \geq 1$

on a $\forall x \in [a,b] \ \forall t \in I \quad |\partial_1^k f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

La fct φ est C^0_{pm}, et intégrable car

- $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} |\text{Log}\, t|^k\, t^{a-1} \underset{t \to 0}{=} o\left(t^{a/2 - 1}\right) \to L^1$ en 0 car $a/2 - 1 > -1$
- $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{=} o(1/t^2)$ car $t^2 |\text{Log}\, t|^k\, t^{b-1} e^{-t} = \underbrace{\frac{|\text{Log}\, t|^k}{t}}_{\to 0} \times \underbrace{t^{b+3} e^{-t}}_{\to 0} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.