

## Théorèmes généraux de topologie

De façon transversale,  $E$  ( $F, G$ , etc) désigne un evn dont on note  $\|\cdot\|$  la norme (avec un indice  $\|\cdot\|_E$  en cas de confusion possible).

### 1 Ouverts, fermés.

#### 1.1. Définitions.

**1.1.1.** Une partie  $U$  de  $E$  est dite **ouverte dans**  $E$  si  $U$  est voisinage de chacun de ses points, *i.e.* si pour tout  $x$  de  $U$  il existe  $r = r(x) > 0$  tel que  $\overline{B}(x, r) \subset U$ .

À cause de la chaîne d'inclusions  $\overline{B}(x, r/2) \subset B(x, r) \subset \overline{B}(x, r)$ , on peut remplacer dans la définition  $\overline{B}(x, r)$  par  $B(x, r)$ .

La propriété d'être ouvert dans  $E$  dépend de la norme (on devrait dire :  $U$  ouvert dans  $(E, \|\cdot\|)$ , et comme d'habitude on fait un abus de langage paresseux). On verra plus précisément que cette propriété ne dépend que de la classe d'équivalence de la norme – *i.e.* la propriété d'être ouvert (ou fermé, *cf infra*) est *topologique*.

On se permet, quand il n'y a aucune ambiguïté, de dire « $U$  est ouvert». Cet abus est dangereux, car les notions d'ouvert (resp. fermé) sont relatives à l'espace ambiant (ce qui n'est pas le cas de la compacité, *cf infra*) : *cf* section 1.5.

**1.1.2.** Une partie  $F$  de  $E$  est dite **fermée dans**  $E$  si son complémentaire  $\complement_E F$  est ouvert dans  $E$ .

**1.1.3. Exercice.** Montrer qu'une boule ouverte (resp. fermée) est ouverte (resp. fermée).

**1.1.4. ¶ Exercice.** On munit  $E = C^0([0, 1], \mathbf{R})$  de  $\|\cdot\|_\infty$  et on note  $U = \{f \in E; f > 0\}$ . Justifier que pour  $f \in U$  il existe  $\alpha > 0$  tel que  $f(x) \geq \alpha$  pour tout  $x \in [0, 1]$  et en déduire que  $U$  est ouverte dans  $E$  (considérer  $\overline{B}(f, \alpha/2)$ ).

#### 1.2. Théorèmes généraux.

##### 1.2.1.

**Proposition 1 (Indépendance vis-à-vis de la norme à équivalence près).** *Soient*

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -ev,
- $U \subset E$ ,
- $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  deux normes sur  $E$ .

*Supposons*

hyp  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont équivalentes.

*On a alors équivalence :*

- (i)  $U$  ouverte dans  $(E, \|\cdot\|_1)$
- (ii)  $U$  ouverte dans  $(E, \|\cdot\|_2)$

*Démonstration.* Notons avec indice  $\overline{B}_i(x, r)$  la boule au sens de  $\|\cdot\|_i$  ;

Il suffit de montrer, par symétrie des rôles, que si  $\|\cdot\|_1$  est plus fine que  $\|\cdot\|_2$  et que  $U$  ouverte dans  $(E, \|\cdot\|_2)$  alors  $U$  ouverte dans  $(E, \|\cdot\|_1)$ .

Soit donc  $x \in U$  et  $r > 0$  tel que  $\overline{B}_2(x, r) \subset U$ .

Soit  $\alpha > 0$  tel que  $\|\cdot\|_2 \leq \alpha \|\cdot\|_1$  : on a alors l'inclusion  $\overline{B}_1(x, r/\alpha) \subset \overline{B}_2(x, r)$ .

On a donc  $\overline{B}_1(x, r/\alpha) \subset U$  et donc  $U$  est ouverte dans  $(E, \|\cdot\|_1)$ . □

**Corollaire.** Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -ev,
- $F \subset E$ ,
- $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  deux normes sur  $E$ .

Supposons

hyp  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont équivalentes.

On a alors équivalence :

- (i)  $F$  fermée dans  $(E, \|\cdot\|_1)$
- (ii)  $F$  fermée dans  $(E, \|\cdot\|_2)$

### 1.2.2.

**Proposition 2 (Axiomes des ouverts).** Soit  $E$  un evn. Alors :

1.  $E$  et  $\emptyset$  sont ouverts (dans  $E$ ).
2. **(Stabilité par intersection finie)** Pour tous  $U_1, \dots, U_p$  ouverts de  $E$ ,  $U_1 \cap \dots \cap U_p$  est ouvert dans  $E$ .
3. **(Stabilité par union quelconque)** Pour tout ensemble  $I$  et toute famille  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $E$ ,  $\bigcup_{i \in I} U_i$  est ouvert dans  $E$ .

Démonstration. 1. évident.

2. Soit  $x$  dans l'intersection, et  $r_i > 0$  tel que  $\bar{B}(x, r_i) \subset U_i$ . Soit  $r = \min r_i$  :  $r$  est  $> 0$  et on a  $\bar{B}(x, r) \subset U_i$  pour tout  $i$ , donc  $\bar{B}(x, r)$  est dans l'intersection.
3. Soit  $x$  dans l'union :  $x$  est dans l'un des  $U_i$ , donc  $U_i$  contient une  $\bar{B}(x, r)$ , qui est aussi contenue dans l'union.

□

En complétant on obtient

**Proposition 3 (Axiomes des fermés).** Soit  $E$  un evn. Alors :

1.  $E$  et  $\emptyset$  sont fermés (dans  $E$ ).
2. **(Stabilité par union finie)** Pour tous  $F_1, \dots, F_p$  fermés de  $E$ ,  $F_1 \cup \dots \cup F_p$  est fermé dans  $E$ .
3. **(Stabilité par intersection quelconque)** Pour tout ensemble  $I$  et toute famille  $(F_i)_{i \in I}$  de fermés de  $E$ ,  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est fermé dans  $E$ .

### 1.2.3.

**Proposition 4 (Produits cartésiens finis d'ouverts).** Soient

- $E_1, \dots, E_p$  des evn,
- $E = E_1 \times \dots \times E_p$  leur produit muni de la topologie produit<sup>1</sup>,
- pour tout  $i$ ,  $U_i \subset E_i$  et  $U = U_1 \times \dots \times U_p$ .

Supposons

hyp Pour tout  $i$ ,  $U_i$  ouvert dans  $E_i$ .

Alors :

Cl  $U$  est ouvert dans  $E$ .

Démonstration. Munissons  $E$  de  $N_\infty$  ( $N_\infty(x) = \max_i \|x_i\|_i$ ). Soit  $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$  et  $r_i > 0$  tel que  $\bar{B}(x_i, r_i) \subset U_i$ . Posons  $r = \min_{i=1}^p r_i$ . On a alors  $\bar{B}(x, r) \subset U$ . □

**Proposition 5 (Produits cartésiens de fermés).** Soient

- $E_1, \dots, E_p$  des evn,
- $E = E_1 \times \dots \times E_p$  leur produit muni de la topologie produit
- pour tout  $i$ ,  $F_i \subset E_i$  et  $F = F_1 \times \dots \times F_p$ .

Supposons

---

1. i.e. muni de la norme sup des composantes  $N_\infty$ , ou de n'importe quelle norme, comme la norme  $N_1$ , qui lui est équivalente

$\boxed{\text{hyp}}$  Pour tout  $i$ ,  $F_i$  fermé dans  $E_i$ .

Alors :

$\boxed{\text{Cl}}$   $F$  est fermé dans  $E$ .

*Démonstration.* Montrons que le complémentaire de  $F$  est ouvert dans  $E$ . Or si  $x = (x_1, \dots, x_p)$  n'est pas dans  $F$ , c'est que l'un des  $x_i$  n'est pas dans  $F_i$ , donc qu'il existe  $r > 0$  tel que  $\overline{B}(x_i, r) \subset \complement_{E_i} F_i$ . Du coup, si  $y = (y_1, \dots, y_p) \in E$  vérifie  $N_\infty(x, y) \leq r$ , on a  $y_i \in \overline{B}(x_i, r)$ , et donc  $y \notin F$ , d'où  $\overline{B}(x, r) \subset \complement_E F$ .

**Variante : preuve séquentielle** (reposant la caractérisation séquentielle des fermés établie au théorème 1) : soit  $(x_n)$  suite de  $F$  telle que  $x_n \rightarrow x$  avec  $x \in E$  et montrons que  $x \in F$ . Or composante par composante, en notant  $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,p})$  et  $x = (x_1, \dots, x_p)$ , on a  $x_{n,i} \rightarrow x_i$  dans  $E_i$ , donc  $x_i \in F_i$  vu que  $F_i$  est fermé dans  $E_i$ , d'où  $x \in F$ .  $\square$

#### 1.2.4. Caractérisation séquentielle des fermés.

**Théorème 1 (Caractérisation séquentielle des fermés).** Soient

- $E$  evn,
- $F \subset E$ ,

on a équivalence

(i)  $F$  fermé dans  $E$

(ii) Pour toute suite  $(x_n)$  telle que

1. pour tout  $n$ ,  $x_n \in F$
2.  $(x_n)$  converge dans  $E$  (vers un  $x \in E$ )

on a  $x \in F$  (en d'autres termes :  $F$  est stable par passage à la limite)

*Démonstration.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Soit donc  $(x_n)$  suite de  $F$  qui converge dans  $E$  vers un certain  $x$  de  $E$ . Montrons que  $x \in F$ . Si ce n'était pas le cas, on aurait  $x \in \complement_E F = U$  qui est un ouvert. Il existerait donc  $r > 0$  tel que  $\overline{B}(x, r) \subset U$ , i.e. aucun point de  $\overline{B}(x, r)$  n'est dans  $F$ . Cela pose problème, car les termes  $x_n$  sont dans  $\overline{B}(x, r)$  APCR, vu que  $x_n \rightarrow x$ . Absurde.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Par contraposée, supposons que  $F$  ne soit pas un fermé, et donc que son complémentaire  $U$  ne soit pas un ouvert. Il existerait donc  $x \in U$  tel qu'aucune boule centrée en  $x$  et de rayon  $> 0$  ne soit incluse dans  $U$ . En d'autres termes, pour tout  $n \geq 1$ , la partie  $\overline{B}(x, 1/n) \cap F$  est non vide. Choisissons  $x_n$  un de ses éléments : pour tout  $n \geq 1$ ,  $x_n$  est dans  $F$ , et  $\|x_n - x\| \leq 1/n$ , ce qui assure que  $x_n \rightarrow x$ .  $\square$

**Corollaire.** Soit  $F \subset \mathbf{R}$ . Supposons

$\boxed{\text{hyp1}}$   $F \neq \emptyset$ .

$\boxed{\text{hyp2}}$   $F$  fermée dans  $\mathbf{R}$ .

$\boxed{\text{hyp3}}$   $F$  majorée (resp. minorée).

Alors :

$\boxed{\text{Cl}}$   $\sup F$  (resp.  $\inf F$ ) est dans  $F$ , i.e.  $F$  possède un maximum (resp. un minimum).

*Démonstration.* En effet, par caract. séq. de la borne sup., le réel  $\sup F$  est limite d'une suite d'éléments  $F$  :  $\sup F$  est donc adhérent à  $F$ , donc appartient à  $F$ .  $\square$

**Exercice.** Reprendre l'exercice 1.1.4 en raisonnant séquentiellement : soit  $(f_n)$  une suite de  $\complement_E U$  qui converge uniformément vers  $f \in E$ . Soit  $x_n \in [0, 1]$  tel que  $f_n(x_n) \leq 0$  et  $x$  une valeur d'adhérence de  $(x_n)$ . Montrer que  $f(x) \leq 0$ .

#### 1.2.5.

**Proposition 6 (Images réciproques d'ouverts, de fermés).** Soient

- $E, F$  evn
- $A \subset F$  une partie
- $f : E \rightarrow F$  application

Supposons

$\boxed{\text{hyp1}}$   $f$  continue sur  $E$ .

$\boxed{\text{hyp2}}$   $A$  ouverte dans  $F$  (resp. fermée dans  $F$ ).

Alors :

$\boxed{\text{Cl}}$   $f^{-1}(A)$  est ouverte dans  $E$  (resp. fermée dans  $E$ ).

*Démonstration.* Supposons  $A$  ouverte et montrons que  $f^{-1}(A)$  est ouverte. Soit donc  $x_0 \in f^{-1}(A)$  : on cherche  $r > 0$  tel que  $\overline{B}(x_0, r) \subset f^{-1}(A)$ .

Or  $f(x_0)$  est dans  $A$ , qui est ouverte il existe donc  $\rho > 0$  tel que  $\overline{B}(f(x_0), \rho) \subset A$ .

Par continuité de  $f$  en  $x_0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\|x - x_0\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq \rho$  : ceci dit exactement que si  $x \in \overline{B}(x_0, \alpha)$ , alors  $f(x) \in \overline{B}(f(x_0), \rho) \subset A$ , et donc  $\overline{B}(x_0, r) \subset f^{-1}(A)$  avec  $r = \alpha$ .

Le cas  $A$  fermé se ramène au cas ouvert en complémentant, puisqu'en notant  $B = \complement_F A$ , on a  $f^{-1}(A) = \complement_E f^{-1}(B)$ . On peut aussi procéder séquentiellement : si  $(x_n)$  est une suite de  $f^{-1}(A)$  qui converge vers  $x \in E$ , on a  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  par continuité de  $f$  ; comme  $f(x_n)$  est dans  $A$ , et que  $A$  est fermée, on a  $f(x) \in A$ , donc  $x \in f^{-1}(A)$  comme voulu.  $\square$

### 1.3. Intérieur

**1.3.1. Définition.** Soit  $A$  une partie de l'evn  $E$ .

On dit qu'un point  $x_0 \in A$  est **intérieur** à  $A$  s'il existe  $r_0 > 0$  tel que  $\overline{B}(x_0, r_0) \subset A$ , i.e. si  $A$  est un voisinage de  $x_0$ .

On appelle **intérieur de  $A$** , et on note  $\overset{\circ}{A}$ , l'ensemble des points intérieurs à  $A$ .

**1.3.2.** La partie  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert de  $E$ .

Si en effet  $x_0$  est un point intérieur de  $A$ , il existe  $r_0 > 0$  tel que  $B(x_0, r_0) \subset A$ . Mais comme  $B(x_0, r_0)$  est un ouvert de  $E$ , pour tout  $x \in B(x_0, r_0)$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset B(x_0, r_0) \subset A$ , ce qui montre que tous les points de  $B(x_0, r_0)$  sont intérieurs à  $A$ , donc que  $B(x_0, r_0) \subset \overset{\circ}{A}$ , et donc que  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert de  $E$ .

**1.3.3.** La partie  $A$  est ouverte dans  $E \Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$ . En effet :

$\Rightarrow$ : Si  $A$  est ouverte,  $A$  est bien un voisinage de chacune de ses points donc  $A = \overset{\circ}{A}$ .

$\Leftarrow$ : si  $A = \overset{\circ}{A}$ ,  $A$  est ouverte puisque  $\overset{\circ}{A}$  l'est.

### 1.3.4.

**Proposition 7.** Soient

- $E$  evn,
- $A \subset E$ ,

L'intérieur de  $A$  est le plus grand ouvert (un sens de l'inclusion) inclus dans  $A$  ; plus précisément,  $\overset{\circ}{A}$  est la réunion de tous les ouverts inclus dans  $A$

*Démonstration.* Soit  $U$  un ouvert de  $E$  tel que  $U \subset A$ . Soit  $x \in U$  et  $r > 0$  tel que  $\overline{B}(x, r) \subset U$ . On a donc  $\overline{B}(x_0, r) \subset A$ , et donc  $x$  est intérieur à  $A$  : ainsi tous les  $x$  de  $U$  sont dans  $\overline{B}(x_0, r)$ .

Notons  $U$  la réunion de tous les ouverts inclus dans  $A$ .  $U$  est un ouvert par réunion d'ouverts, et il est inclus dans  $A$  puisque chaque ouvert qui le compose l'est : ainsi  $U \subset \overset{\circ}{A}$  d'après le premier point.

Comme en outre  $\overset{\circ}{A}$  est lui-même un ouvert contenu dans  $A$ , il est l'un des ouverts définissant  $U$ , et donc  $\overset{\circ}{A} \subset U$ .  $\square$

### 1.4. Adhérence

**1.4.1. Définition.** Soit  $A$  une partie de l'evn  $E$ .

On rappelle qu'un point  $x_0$  de  $E$  est dit **adhérent** à  $A$  si toute boule de rayon  $> 0$  centrée en  $x_0$  intersecte non trivialement  $A$ , i.e. si pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\overline{B}(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ .

On appelle **adhérence de  $A$**  la partie notée  $\overline{A}$  constituée de tous les points adhérents à  $A$ .

### 1.4.2. Critères séquentiels. On rappelle le

**Théorème 2 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence).** *Soient*

- $E$  evn,
- $A \subset E$ ,
- $x \in E$ ,

on a équivalence

(i)  $x \in \bar{A}$

(ii) Il existe une suite  $(a_n)$  telle que

1. pour tout  $n$ ,  $a_n \in A$
2.  $a_n \rightarrow x$

*Démonstration.* Elle a été faite au chapitre «evn», mais je la remets ici pour son importance.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\bar{B}(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$  : on choisit donc  $a_n$  dans cette intersection, on a  $\|a_n - x\| \leq 1/n$  et  $a_n \in A$ . La suite  $(a_n)$  ainsi définie convient.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Il faut montrer :  $(\forall \varepsilon > 0)(\bar{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset)$ . Soit donc  $\varepsilon > 0$ . Soit  $(a_n)$  une suite donnée par l'hyp (ii). On a  $\|a_n - x\| \leq \varepsilon$  pour  $n$  assez grand, et donc  $a_n \in \bar{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ .  $\square$

### 1.4.3. L'adhérence est un fermé de $E$ .

**Proposition 8.** *Soient*

- $E$  evn,
- $A \subset E$ ,

L'adhérence de  $A$  est un fermé de  $E$ .

*Démonstration.* On peut procéder séquentiellement :

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite d'éléments de  $\bar{A}$  qui converge vers  $x \in E$  ; montrons que  $x$  est adhérent à  $A$ .

Par hypothèse,  $x_n$  est dans  $\bar{A}$ , donc il existe  $a_n \in A$  tel que  $\|x_n - a_n\| \leq 1/n$ . On a donc

$\|x - a_n\| = \|(x - x_n) + (x_n - a_n)\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - a_n\| \leq \|x - x_n\| + 1/n$  qui tend vers 0, donc  $(a_n)$  est une suite de  $A$  qui converge vers  $x$ , et donc  $x \in \bar{A}$ .

On peut aussi procéder par la définition, en montrant que le complémentaire de  $\bar{A}$  est ouverte dans  $E$ . Soit donc  $x \in U := \complement_E \bar{A}$  : par définition, il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que  $\bar{B}(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ . Cela signifie que  $\bar{B}(x, \varepsilon) \subset U$ , donc que  $U$  est ouverte.  $\square$

**1.4.4.** Si  $F$  est une partie fermée dans  $E$  contenant  $A$ ,  $F$  contient  $\bar{A}$ . En effet, si  $x \in \bar{A}$ , soit  $(x_n)$  suite de  $A$  qui converge vers  $x$ . Comme  $A \subset F$ , les  $x_n$  sont dans  $F$  et donc  $x$  est dans  $F$  aussi par caractérisation séquentielle des fermés. Autrement dit

**Proposition 9.** *Soient*

- $E$  evn,
- $A \subset E$ ,

L'adhérence de  $A$  est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant  $A$ . Plus précisément,  $\bar{A}$  est l'intersection des fermés de  $E$  qui contiennent  $A$

*Démonstration.* Il reste à prouver la 2<sup>è</sup> assertion. Notons  $F$  l'intersection des fermés de  $E$  qui contiennent  $A$  et montrons que  $F = \bar{A}$ . Par construction,  $F$  est lui même un fermé (par intersection de fermés) et il contient  $A$  (tous les fermés le composant contiennent  $A$ ) ; donc  $\bar{A} \subset F$  d'après le premier point.

Par ailleurs,  $\bar{A}$  est lui même un fermé qui contient  $A$  (puisque tout point de  $A$  est adhérent à  $A$  de façon évidente :  $\bar{A}$  est donc l'un des fermés définissant  $F$ ).  $\square$

**1.4.5.** On a  $A$  fermée dans  $E \Leftrightarrow A = \bar{A}$ . En effet :

$\Rightarrow$  : Si  $A$  est fermée, et que  $x \in \bar{A}$ ,  $x$  est limite d'une suite d'éléments de  $A$ , qui par caractérisation séquentielle des fermés est dans  $A$ , et donc  $\bar{A} \subset A$ , d'où l'égalité (l'autre inclusion étant évidente).

$\Leftarrow$  : si  $A = \bar{A}$ ,  $A$  est fermée puisque  $\bar{A}$  est un fermé.

**1.4.6. Définition** On appelle **frontière** de  $A$  la partie fermée définie par  $Fr(A) = \partial A := \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .

### 1.4.7. Intérieur vs. adhérence.

**Proposition 10.** Soient

- $E$  evn,
- $A \subset E$ ,

On a  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_E A = \mathcal{C}_E(\overline{A})$  et  $\mathcal{C}_E \overset{\circ}{A} = \overline{\mathcal{C}_E(A)}$ , soit encore  $\overline{A} = \mathcal{C}_E(\overset{\circ}{\mathcal{C}}_E A)$  et  $\overset{\circ}{A} = \mathcal{C}_E(\overline{\mathcal{C}_E(A)})$ .

*Démonstration.* Montrons  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_E A = \mathcal{C}_E(\overline{A})$ .

$\subset$  : Soit  $x$  un point intérieur à  $\mathcal{C}_E A$ . Il existe donc  $r > 0$  tel que  $\overline{B}(x, r) \subset \mathcal{C}_E A$ . Si on avait  $x \in \overline{A}$ , on disposerait d'une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $A$  telle que  $a_n \rightarrow x$  : les  $a_n$  seraient dans  $\overline{B}(x, r)$  APCR, contredisant l'inclusion  $\overline{B}(x, r) \subset \mathcal{C}_E A$ .

$\supset$  : Soit  $x \notin \overline{A}$ . Il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que  $\overline{B}(x, \varepsilon) \cap A$  soit vide, i.e. tel que  $\overline{B}(x, \varepsilon) \subset \mathcal{C}_E A$ , ce qui prouve que  $x$  est dans l'intérieur de  $\mathcal{C}_E A$ .

La seconde identité est conséquence de la première : l'égalité  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_E B = \mathcal{C}_E(\overline{B})$ , avec  $B = \mathcal{C}_E A$ , est exactement celle voulue

□

**1.5. Ouverts et fermés relatifs**  $E$  désigne un evn fixé, et  $A \subset E$  une partie quelconque.

**1.5.1. Définition.** Soit  $U \subset A$ .  $U$  est dite **ouverte dans**  $A$ , ou ouvert relatif de  $A$ , si pour tout  $x \in U$ , il existe  $r = r(x) > 0$  tel que  $\overline{B}(x, r) \cap A \subset U$ .

Comme d'habitude, on peut prendre des boules ouvertes au lieu de fermées dans la déf.

**Attention :**  $A$  est donc ouverte dans  $A$ , même si  $A$  n'est pas ouverte dans  $E$ . En particulier, un ouvert (resp. fermé) relatif n'a aucune raison d'être un ouvert (resp. fermé) de  $E$ .

**1.5.2. Définition.** Soit  $F \subset A$ .  $F$  est dite **fermée dans**  $A$ , ou fermé relatif de  $A$ , si son complémentaire dans  $A$ ,  $A \setminus F$ , est ouverte dans  $A$ .

**1.5.3. Définition.** Soit  $D \subset A$ .  $D$  est dite **dense dans**  $A$ , si  $A \subset \overline{D}$ .

D'après le critère seq de l'adhérence, on a  $D$  dense dans  $A \Leftrightarrow$  tout  $x$  de  $A$  est limite d'une suite d'éléments de  $D$ .

**1.5.4. Définition.** Soit  $x \in A$  et  $V \subset A$ .  $V$  est dite **voisinage relatif de  $x$  dans**  $A$  s'il existe  $r = r(x) > 0$  tel que  $\overline{B}(x, r) \cap A \subset V$ .

Ainsi  $U$  est un ouvert relatif de  $A \Leftrightarrow U$  est un voisinage relatif de tous ses points.

### 1.5.5. Caractérisation des fermés relatifs.

**Proposition 11.** Soient

- $E$  evn,
- $A \subset E$ ,
- $F \subset A$ ,

on a équivalence

(i)  $F$  fermé dans  $A$

(ii) Pour suite  $(x_n)$  telle que

1. pour tout  $n$ ,  $x_n \in F$
2.  $x_n \rightarrow x$  pour un  $x \in A$

on a  $x \in F$ .

*Démonstration.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Supposons  $U = \mathcal{C}_A F$  ouverte et que  $x \in U$  est limite d'une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$ . On aurait  $\overline{B}(x, r) \cap A \subset U$  pour un  $r > 0$ , et donc  $x_n \in \overline{B}(x, r)$  pour  $n$  assez grand.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Par contraposée. Si  $U = \mathcal{C}_A F$  était non ouverte, on disposerait d'un  $x \in U$  vérifiant  $B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . En prenant  $\varepsilon = 1/n$  successivement pour  $n = 1, 2, \dots$ , on disposerait d'une suite  $(x_n)$  telle que  $x_n \in B(x, 1/n) \cap F$  pour tout  $n$ , donc d'une suite de  $F$  qui converge vers  $x$ .  $\square$

**1.5.6. Ouverts relatifs et ouverts de  $E$ .** On peut décrire les ouverts (resp. les fermés) de  $A$  à l'aide des ouverts (resp. des fermés) de  $E$ .

**Proposition 12.** *Soient*

- $E$  evn,
- $A \subset E$ ,
- $U \subset A$  (resp  $F \subset A$ )

*on a équivalence*

(i)  $U$  ouvert de  $A$  (resp  $F$  fermé de  $A$ )

(ii) Il existe un ouvert  $V$  de  $E$  tel que  $U = V \cap A$  (resp il existe un fermé  $G$  de  $E$  tel que  $F = G \cap A$ ).

*Démonstration.* On traite le cas ouvert seulement.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Si  $U$  est un ouvert de  $A$ , alors  $U$  est réunion des boules relatives qu'il contient, *i.e.* choisissons pour tout  $x \in U$  un réel  $r(x) > 0$  tel que  $B(x, r(x)) \cap A \subset U$  (si l'on veut éviter l'usage de l'axiome du choix, il suffit de prendre pour  $r(x) =$  borne sup. des  $r > 0$  tels que  $B(x, r) \cap A \subset U$ ). On a :

$$U = \bigcup_{x \in U} \left( B(x, r(x)) \cap A \right)$$

ce qui se vérifie par double inclusion. Ceci se réécrit :

$$U = \left( \underbrace{\bigcup_{x \in U} B(x, r(x))}_{=V \text{ ouvert de } E} \right) \cap A$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Soit donc  $V$  ouvert de  $E$  tel que  $U = V \cap A$ . Soit  $x \in U$ ; on a  $x \in V$ , il existe donc  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset V$  et donc on a  $B(x, r) \cap A \subset U$  :  $U$  est donc ouvert dans  $A$ .  $\square$

**1.5.7. Ouverts relatifs et images réciproques.** Cela n'est pas mentionné dans le programme, mais la preuve est la même que celle de la prop. 6 : si  $f : A \rightarrow B$  est une application continue ( $A$  et  $B$  des parties non vides d'evn  $E$  et  $F$  resp.), et si  $C \subset B$  est un ouvert (resp. fermé) relatif de  $B$ , alors  $f^{-1}(C)$  est un ouvert (resp. fermé) relatif de  $A$ .

## 2 Compacts.

**Attention :** on va démontrer dans cette section le théorème d'équivalence des normes en dimension finie (thm 1 du chap. 4). Le lecteur constatera qu'aucune de ses conséquences n'est utilisée pour la prouver (pas de cercle vicieux donc). On précise donc bien dans ce qui suit de quelle norme on munit l'evn  $E$ , même (et surtout) quand il est de dimension finie : on va voir qu'on sait décrire les compacts de  $(E, \|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}})$ , et que des propriétés de la compacité on arrive à déduire le thm d'équivalence des normes.

### 2.1. Définition

**2.1.1.** Une partie  $K$  d'un evn  $E$  est dite **compacte** (pour  $\|\cdot\|$  en cas d'ambiguïté) si toute suite de  $K$  possède une valeur d'adhérence dans  $K$ , *i.e.* si pour toute  $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$  il existe  $x \in K$  et  $\varphi$  extractrice tels que  $x_{\varphi(n)} \rightarrow x$ .

**2.1.2. Exemple fondamental :** Soit  $E$  un ev de dimension finie,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$  la norme sup. en les coordonnées associées. Soit  $K$  fermée bornée dans  $(E, \|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}})$ . Alors  $K$  est compacte.

En effet, soit  $(x_n)$  suite de  $K$ ; on peut écrire  $x_n = \sum_{i=1}^d x_{n,i} e_i$ . La suite  $(x_n)$  est bornée car  $K$  l'est, les suites coordonnées  $(x_{n,i})_{n \in \mathbf{N}}$  sont donc aussi toutes bornées (on travaille avec  $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$ ) : le thm de Bolzano Weierstrass vu en sup s'applique :

- il existe  $\varphi_1$  tel que  $(x_{\varphi_1(n),1})_{n \in \mathbf{N}}$  converge,
- il existe  $\varphi_2$  tel que  $(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n),2})_{n \in \mathbf{N}}$  converge, etc
- il existe  $\varphi_d$  tel que  $(x_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_d(n),d})_{n \in \mathbf{N}}$  converge.

Si l'on pose  $\varphi = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_d$ , toutes les suites  $(x_{\varphi(n),i})_{n \in \mathbf{N}}$  convergent simultanément<sup>2</sup> et la suite  $(x_{\varphi(n)})$  converge vers un  $x \in E$

Reste à prouver que  $x \in K$  : la suite  $(x_{\varphi(n)})$  d'éléments de  $K$ , qui est fermé dans  $E$ , a sa limite dans  $K$ .

## 2.2. Théorèmes généraux.

### 2.2.1. Propriété topologique.

**Proposition 13.** Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -ev,
- $K \subset E$ ,
- $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  deux normes sur  $E$ .

Supposons

$\boxed{\text{hyp}}$   $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont équivalentes.

Alors :

$\boxed{\text{Cl}}$   $K$  compacte au sens de  $\|\cdot\|_1 \Leftrightarrow K$  compacte au sens de  $\|\cdot\|_2$ .

*Démonstration.* En effet, une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  converge indifféremment pour l'une ou l'autre des deux normes.  $\square$

### 2.2.2. Bornitude et universelle fermeture des compacts.

**Proposition 14.** Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -evn,
- $A \subset E$ ,
- $K \subset A$ .

Supposons

$\boxed{\text{hyp}}$   $K$  est compacte.

Alors :

$\boxed{\text{Cl}}$   $K$  est bornée et fermée dans  $A$ .

En particulier,  $K = \overline{K}$  :  $K$  compacte est fermée dans  $E$ .

Une partie  $K$  compacte est fermée dans toute partie la contenant : on dit que les compacts sont **universellement fermés**.

*Démonstration.* Il y a deux points à prouver.

•  **$K$  est bornée.** Si tel n'était pas le cas, pour tout réel  $M > 0$  il existerait  $x_M \in K$  tel que  $\|x_M\| \geq M$ . Prenant successivement  $M = 1, 2, \dots$ , on disposerait d'une suite  $(x_n)$  de  $K$  telle que  $\|x_n\| \geq n$  pour tout  $n$ . Toutes les sous-suites d'une telle suite est non bornée, donc divergente, contredisant la compacité de  $K$ .

•  **$K$  est fermée dans  $A$ .** Soit  $(x_n)$  une suite de  $K$  qui converge vers un  $x$  de  $A$  : Montrons que  $x \in K$ .

Or, en tant que suite de  $K$  compacte,  $(x_n)$  possède une valeur d'adhérence  $x'$  dans  $K$ . Par unicité de la limite,  $x' = x$  et donc  $x \in K$ .  $\square$

2. C'est là qu'on comprend pourquoi il ne fallait pas extraire séparément, et définir  $\varphi_i$  tel que  $(x_{\varphi_i(n),i})_{n \in \mathbf{N}}$  converge pour tout  $i$  : il n'y a alors aucun moyen de faire converger conjointement les suites coordonnées, ce dont on a besoin pour qu'une suite converge au sens de  $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$ .



**2.2.3. Remarque :** la réciproque est vraie en dim. finie (cf 2.1.2 pour le cas de  $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$ ) mais fausse en dim. infinie. Par ex, dans  $E = C^0([0, 1], \mathbf{R})$  muni de  $\|\cdot\|_{\infty}$ , la suite  $(f_n)$  définie par  $f_n(t) = t^n$  n'a aucune sous suite convergente : la boule unité de  $E$  n'est donc pas compacte. En effet, toute sous-suite de  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $\delta_{\{1\}}$ , qui n'est pas dans  $E$  : une sous-suite de  $E$  ne pourrait converger au sens de  $\|\cdot\|_{\infty}$  que vers  $\delta_{\{1\}}$ , qui n'est pas continue.

**2.2.4. Fermés d'un compact.**

**Proposition 15.** Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -evn,
- $K \subset E$ ,
- $F \subset K$ .

Supposons

hyp1  $K$  est compacte.

hyp2  $F$  fermée dans  $K$ .

Alors :

Cl  $F$  est compacte.

*Démonstration.* Soit  $(x_n)$  une suite de  $F$ .

Comme  $F \subset K$ ,  $(x_n)$  est en particulier une suite de  $K$ , donc possède une sous-suite convergente  $(x_{\varphi(n)})$ , dont on note  $x \in K$  la limite.

La suite  $(x_{\varphi(n)})$  étant une suite de  $F$  fermée dans  $K$ , la limite  $x$  est dans  $F$  par caract. séquentielle.

La suite  $(x_n)$  possède donc une valeur d'adhérence dans  $F$ , qui est ainsi compacte! □

**2.3. Stabilité vis-à-vis des opérations ensemblistes.**

**Proposition 16.** Soit  $E$  un evn.

1. Soit  $(K_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de compacts ( $I \neq \emptyset$  ensemble quelconque) Alors  $\bigcap_{i \in I} K_i$  est compacte.
2. Soit  $(K_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille finie de compacts ( $p \in \mathbf{N}^*$ ) Alors  $\bigcup_{i=1}^p K_i$  est compacte.
3. Soit  $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille finie d'evn et  $(K_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille finie de compacts ( $K_i \subset E_i$  pour tout  $i$ ). Alors  $\prod_{i=1}^p K_i$  est compacte dans  $E = \prod_{i=1}^p E_i$  (muni de la topologie produit.)

*Démonstration.*

1. Soit  $(K_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de compacts. Soit  $K := \bigcap_{i \in I} K_i$  : on a aussi  $K = \bigcap_{i \in I} (K_{i_0} \cap K_i)$  intersection de fermés de  $K_{i_0}$  :  $K$  est donc fermé dans  $K_{i_0}$  compact, donc compact.
2. Soit  $(K_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille finie de compacts ( $p \in \mathbf{N}^*$ ) Soit  $(x_n)$  une suite de  $K := \bigcup_{i=1}^p K_i$ .  
Je dis que l'un des  $K_i$  contient une infinité de termes de la suite  $(x_n)$  : sinon, les  $I_i = \{n \in \mathbf{N}; x_n \in K_i\}$  seraient toutes des parties finies de  $\mathbf{N}$  de réunion  $\mathbf{N}$  qui est un ensemble infini!  
Soit donc  $i_0$  tel que  $I_{i_0}$  soit infini. Il est prouvé dans le chapitre sur la dénombrabilité l'existence d'une  $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow I_{i_0}$  bijective et strictement croissante (l'application  $\varphi$  définie par récurrence par  $\varphi(0) = \min I_{i_0}$  et  $\varphi(n+1) = \min(I_{i_0} \setminus \varphi(\mathbb{I}0, n))$  convient).  
Ainsi la sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  est une suite de  $K_{i_0}$ , donc possède une valeur d'adhérence : une sous-sous-suite  $(x_{\varphi \circ \psi(n)})$  de  $(x_n)$  est convergente, et  $(x_n)$  possède une valeur d'adhérence.
3. Soit  $(x_n)$  une suite de  $K$  ; notons  $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,p})$  les coordonnées. Par hyp. de compacité des  $K_i$ ,
  - il existe  $\varphi_1$  tel que  $(x_{\varphi_1(n),1})_{n \in \mathbf{N}}$  converge,
  - il existe  $\varphi_2$  tel que  $(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n),2})_{n \in \mathbf{N}}$  converge, etc
  - il existe  $\varphi_d$  tel que  $(x_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_d(n),d})_{n \in \mathbf{N}}$  converge.
 Si l'on pose  $\varphi = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_d$ , toutes les suites  $(x_{\varphi(n),i})_{n \in \mathbf{N}}$  convergent simultanément, et donc  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  converge elle même par caractérisation de la convergence dans  $E$  (pour  $N_{\infty}$ ), ce que nous voulions. □

### 2.3.1. Compacité et fonctions.

**Proposition 17.** *Soient*

- $E, F$  evn,
- $A \subset E$  non vide,
- $K \subset A$ ,
- $f : A \rightarrow F$ ,

*Supposons*

$\boxed{\text{hyp1}}$   $K$  est compacte.

$\boxed{\text{hyp2}}$   $f$  continue.

*Alors :*

$\boxed{\text{Cl}}$   $f(K)$  est compacte.

**Attention :** C'est faux pour l'image réciproque, prendre  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto 1/(x^2 + 1)$  et  $C = [0, 1]$  :  $f^{-1}(C) = \mathbf{R}$  qui n'est pas compacte car non bornée.

*Démonstration.* Soit  $(y_n)$  une suite de  $f(K)$ . On écrit  $y_n = f(x_n)$  avec  $x_n \in K$ .

Par hypothèse sur  $K$ , on peut extraire une sous-suite convergeant dans  $K$  :  $x_{\varphi(n)} \rightarrow x$ , avec  $x \in K$ .

Par continuité de  $f$ , on a  $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(x)$  : la sous-suite  $(y_{\varphi(n)})$  converge donc vers  $y = f(x)$  qui est dans  $f(K)$ , d'où le résultat.  $\square$

**Théorème 3 (Théorème des bornes atteintes).** *Soient*

- $E$  evn,
- $K \subset E$  non vide,
- $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ ,

*Supposons*

$\boxed{\text{hyp1}}$   $K$  est compacte.

$\boxed{\text{hyp2}}$   $f$  continue.

*Alors :*

$\boxed{\text{Cl}}$   $f$  est bornée et atteint ses bornes.

*Démonstration.* J'en donne deux : la 1ère utilise ce qui précède (mais on ne voit rien), la 2è est plus pédestre.

PREUVE 1 : Par continuité de  $f$  et compacité de  $K$ ,  $f(K)$  est une partie compacte non vide de  $\mathbf{R}$ , en particulier bornée (donc possède une borne sup. et inf.), et fermée : donc les bornes sup. et inf. appartiennent à  $f(K)$ , ce qui prouve le résultat.

PREUVE 2 : D'abord,  **$f$  est bornée** : sinon, on disposerait pour tout  $n \in \mathbf{N}$  de  $x_n \in K$  tel que  $|f(x_n)| \geq n$ . Soit  $x$  une valeur d'adhérence de  $(x_n)$  et  $\varphi$  telle que  $x_{\varphi(n)} \rightarrow x$  : on aurait  $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(x)$  par continuité de  $f$ , la suite  $(f(x_{\varphi(n)}))$  est donc convergente, ce qui contredit la minoration  $|f(x_{\varphi(n)})| \geq \varphi(n) \geq n \rightarrow +\infty$ . Puis, on montre que **les bornes sont atteintes**. Par exemple, soit  $M = \sup_K f$ . Pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $x_n \in K$  tel que  $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$ . Comme ci-dessus soient  $x$  et  $\varphi$  tels que  $x_{\varphi(n)} \rightarrow x$  : on a  $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(x)$  par continuité de  $f$  et l'inégalité  $M - \frac{1}{\varphi(n)} \leq f(x_{\varphi(n)}) \leq M$  assure que  $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow M$  par encadrement, d'où  $f(x) = M$  par unicité de la limite.  $\square$

**Rappel** On dit que  $f : A \rightarrow F$  est uniformément continue (UC) si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x, y \in K) \left[ (\|x - y\|_E \leq \alpha) \Rightarrow (\|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon) \right]$$

**Théorème 4 (Théorème de Heine).** *Soient*

- $E, F$  evn,
- $K \subset E$  non vide,
- $f : K \rightarrow F$ ,

*Supposons*

$\boxed{\text{hyp1}}$   $K$  est compacte.

$\boxed{\text{hyp2}}$   $f$  continue.

Alors :

$\boxed{C\ell}$   $f$  est uniformément continue.

*Démonstration.* Par l'absurde : si  $f$  n'était pas uniformément continue, il existerait  $\varepsilon_0 > 0$  tel que

$$(\forall \alpha > 0)(\exists x_\alpha, y_\alpha \in K) \left[ (\|x_\alpha - y_\alpha\|_E \leq \alpha) \text{ et } (\|f(x_\alpha) - f(y_\alpha)\|_F > \varepsilon_0) \right]$$

En prenant successivement  $\alpha = 1, 1/2, \dots, 1/n$ , on disposerait de deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  de  $K$  telles que

$$\begin{aligned} (1) \quad & \|x_n - y_n\| \leq 1/n \\ (2) \quad & \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Soient  $x$  et  $\varphi$  tels que  $x_{\varphi(n)} \rightarrow x$ . On a successivement :

1.  $\boxed{y_{\varphi(n)} \rightarrow x :}$  en effet,  
 $\|y_{\varphi(n)} - x\| \leq \|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - x\| \leq 1/\varphi(n) + \|x_{\varphi(n)} - x\| \rightarrow 0.$
2.  $\boxed{\|f(x_n) - f(y_n)\| \rightarrow 0.}$  en effet, par continuité de  $f$ ,  $f(x_n)$  et  $f(y_n)$  tendent vers  $f(x)$ .

ce qui contredit la minoration  $\|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon_0$  APCR.  $\square$

**Illustration du théorème de Heine :** Soit  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{K}$  continue ; on pose  $F(x) = \int_c^d f(x, t) dt$ . Alors  $F$  est continue.

On munit  $\mathbf{R}^2$  de la norme infinie. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\alpha > 0$  un module d'uniforme continuité associé à  $\varepsilon$ . En particulier, dès que  $|x - y| \leq \alpha$ , on a  $|f(x, t) - f(y, t)| \leq \varepsilon$ , et ce *indépendamment de  $t$* . En intégrant, il vient par IT  $\boxed{|F(x) - F(y)| \leq \varepsilon(d - c)}$ , et donc  $F$  est UC.

**Remarque :** Ceci peut se prouver aussi avec le point de vue des intégrales à paramètres, mais la preuve ci-dessus a le mérite de ne reposer sur aucun résultat admis.

### 2.3.2. Compacité et convergence des suites.

**Théorème 5.** Soient

- $E$  evn,
- $K \subset E$  compacte,
- $(x_n)$  suite de  $K$ ,

Équivalence :

- (i)  $(x_n)$  converge.
- (ii)  $(x_n)$  possède une unique valeur d'adhérence

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Toutes les sous-suites d'une suite convergente convergent vers la même limite.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Soit  $\ell$  l'unique valeur d'adhérence de  $(x_n)$  et supposons que  $(x_n)$  ne converge pas vers  $\ell$ . On dispose alors d'un  $\varepsilon_0 > 0$  tel que

$$(\forall N \in \mathbf{N})(\exists n \geq N)(\|x_n - \ell\| > \varepsilon_0)$$

On construit par récurrence une extractrice  $\varphi$  telle que  $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| > \varepsilon_0$  :

- On pose  $\varphi(0) =$  le min. des entiers  $n$  tels que  $\|x_n - \ell\| > \varepsilon_0$ .
- Supposons définis  $\varphi(k)$  pour  $k = 0, 1, \dots, n$  : on pose  $\varphi(n+1) =$  le min. des entiers  $n \geq N = \varphi(n) + 1$  tels que  $\|x_n - \ell\| > \varepsilon_0$ .

Ceci étant fait, la sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  est une suite de  $K$ , qui donc possède une valeur d'adhérence  $\ell'$  ; comme pour tout  $n$ , on a  $\|x_{\varphi(\psi(n))} - \ell\| > \varepsilon_0$  ( $\psi$  désignant une extractrice telle que  $x_{\varphi(\psi(n))} \rightarrow \ell'$ ), en faisant  $n \rightarrow \infty$ , il vient par passage à la lim. dans les inégalités  $\|\ell - \ell'\| \geq \varepsilon_0$ , et donc  $\ell'$  est une valeur d'adhérence de  $(x_n)$  (une sous-sous-suite est une sous-suite!), différente de  $\ell$  : contradiction et résultat.  $\square$

### 2.4. Compacité en dimension finie.

**2.4.1. Résultat préliminaire.** On a vu en section 2.1.2 qu'une partie fermée et bornée de  $E$  muni de  $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$  est compacte. La réciproque est vraie par théorèmes généraux (prop 14). Ainsi **les parties compactes de  $(E, \|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}})$  sont exactement les parties fermées et bornées.**

### 2.4.2. Preuve de l'équivalence des normes.

**Théorème 6.** *Deux normes quelconques d'un  $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie sont équivalentes.*

*Démonstration.* Par transitivité de l'équivalence des normes, il suffit de montrer qu'une norme  $\|\cdot\|$  donnée est équivalente à  $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  étant une base quelconque, mais fixée, de  $E$ .

On note  $S_\infty$  la sphère de  $E$  muni de  $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$ , et on introduit  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|$ . On note  $g = f|_{S_\infty}$  la restriction de  $f$  à  $S_\infty$ .

**Étape 1 :**  $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$  est plus fine que  $\|\cdot\|$ . En effet, si  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ , on a  $\|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \leq |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_n| \|e_n\| \leq \underbrace{(\|e_1\| + \dots + \|e_n\|)}_{=\alpha} \max_{i=1}^n |x_i| = \alpha \|x\|_{\infty, \mathcal{B}}$ .

**Étape 2 :** On munit  $E$  de  $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$  :  $f$  est continue car lipschitzienne. En effet

$$|f(x) - f(y)| = \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \alpha \|x - y\|_{\infty, \mathcal{B}}.$$

**Étape 3 :**  $g$  est continue car restriction d'une fonction continue ( $E$  est toujours muni de  $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$ ).

**Étape 4 :** par compacité de  $S_\infty$ ,  $g$  est donc bornée et atteint ses bornes. Comme  $g$  ne s'annule pas, son min. est  $> 0$ , et il existe  $\beta > 0$  tel que  $g(x) \geq \beta$  pour tout  $x \in S_\infty$ .

**Étape 4 :**  $\|\cdot\|$  est plus fine que  $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$ . Pour tout  $x \neq 0$ , on a en effet  $y = x/\|x\|_{\infty, \mathcal{B}} \in S_\infty$ , donc  $g(y) \geq \beta$ , donc  $\frac{\|x\|}{\|x\|_{\infty, \mathcal{B}}} \geq \beta$  par homogénéité de  $\|\cdot\|$ . D'où  $\|x\| \geq \beta \|x\|_{\infty, \mathcal{B}}$  pour  $x$  non nul, et évidemment pour  $x = 0$ .  $\square$

**2.4.3. Conséquences.** Maintenant que le théorème d'équivalence des normes en dimension finie est prouvé, la boucle est bouclée : les théorèmes de convergence des suites en dimension finie (composante par composante), de continuité par les fonctions coordonnées, de continuité des applications linéaires, et plus généralement les propriétés topologiques (caractérisation des fermés, ouverts) sont toutes justifiées. Mentionnons :

**Corollaire.** *Les parties compactes d'un evn de dimension finie sont exactement les parties fermées bornées.*

*Démonstration.* On a vu que cela était le cas quand  $E$  est muni de  $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$ , c'est donc le cas pour toute norme par équivalence, puisque la compacité est une propriété topologique.  $\square$

On en déduit le critère important de convergence des suites bornées, en dimension finie (une sorte de réciproque au théorème de Bolzano-Weierstrass) :

**Corollaire.** *Soient*

- $E$  evn,
- $(x_n)$  suite de  $E$ ,

*Supposons*

hyp1  $E$  de dimension finie,

hyp2  $(x_n)$  bornée.

*Alors*

Cl 1  $(x_n)$  possède au moins une valeur d'adhérence (thm de Bolzano-Weierstrass)

Cl 2 on a l'équivalence :

(i)  $(x_n)$  converge.

(ii)  $(x_n)$  possède une unique valeur d'adhérence

*Démonstration.* Si  $(x_n)$  est bornée, elle est à valeurs dans  $\overline{B}(0, M)$  pour un certain  $M$ , qui est une partie fermée bornée, donc compacte de  $E$ , d'où l'existence d'une valeur d'adhérence pour  $(x_n)$ . De plus le théorème de caractérisation de la convergence des suites d'une partie compacte s'applique.  $\square$

**Attention !** Le résultat est faux sans l'hypothèse de bornitude. Par exemple la suite définie par  $x_n = 0$  si  $n$  est pair,  $x_n = n$  si  $n$  est impair, n'a qu'une valeur d'adhérence (dans  $\mathbf{R}$ ), mais diverge (car non bornée, ou par limite des sous-suites des termes pairs et impairs) et ne tend pas non plus vers l'infini.

On a vu que les compacts sont des parties universellement fermées. C'est en fait le cas des parties *complètes* (au sens de Cauchy), notion disparue des programmes, mais en voici un reste, dans un cas particulier :

**Corollaire.** Soient

- $E$  evn,
- $A \subset E$  une partie quelconque,
- $F \subset A$  un sous-ev,

Supposons

$\boxed{\text{hyp}}$   $F$  est de **dimension finie**,

Alors

$\boxed{\text{Cl}}$   $F$  est fermée dans  $A$ .

En particulier,  $\overline{F} = F$ .

*Démonstration.* Soit  $(x_n)$  une suite de  $F$  qui converge vers  $x \in A$  : il s'agit de montrer que  $x \in F$ .

Or, en tant que suite convergente,  $(x_n)$  est bornée : ainsi  $(x_n)$  est à valeurs dans  $\overline{B}(0, M) \cap F$  pour un certain  $M$ , qui est une partie fermée bornée de  $F$  (muni de la norme induite par celle de  $E$ ). La suite  $(x_n)$  est donc à valeurs dans la partie compacte  $\overline{B}(0, M) \cap F$ , incluse dans  $A$ , donc fermée dans  $A$  : sa limite  $x$  est donc dans  $\overline{B}(0, M) \cap F$ , donc dans  $F$ .  $\square$

### 3 Connexité par arcs.

**3.1. Définition.** Soient  $E$  un evn,  $C \subset E$ ,  $x_0, x_1 \in C$ . On dit  $x_0$  est **joignable**, **connecté**, ou **relié** (dans  $C$ ) à  $x_1$ , ce que l'on note  $x_0 \rightsquigarrow x_1$ , s'il existe  $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$  telle que

1.  $\varphi$  est continue,
2.  $\varphi([0, 1]) \subset C$  ( $\varphi$  est à valeurs dans  $C$ ),
3.  $\varphi(0) = x_0$  et  $\varphi(1) = x_1$ .

Une telle  $\varphi$  s'appelle **chemin** (continu) joignant  $x_0$  à  $x_1$ .

**Proposition 18.** Soit  $E$  un evn,  $C \subset E$ . La relation  $\rightsquigarrow$  est une relation d'équivalence sur  $C$  (et on pourrait la noter  $\longleftrightarrow$ )

*Démonstration.*

- Réflexivité : on a  $x \rightsquigarrow x$  car  $\varphi =$  constante égale à  $x$  fait l'affaire.
- Symétrie : supposons  $x_0 \rightsquigarrow x_1$ , soit  $\varphi$  un chemin joignant  $x_0$  à  $x_1$ . Le chemin pris à sens inverse,  $\psi(t) = \varphi(1 - t)$ , joint  $x_1$  à  $x_0$ .
- Transitivité : supposons  $x_0 \rightsquigarrow x_1$  et  $x_1 \rightsquigarrow x_2$ , et soient  $\varphi$  et  $\psi$  des connexions entre  $x_0, x_1$  d'une part et  $x_1, x_2$  d'autre part. Posons  $\chi(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ \psi(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$ . L'application  $\chi$  est un chemin continu joignant  $x_0$  à  $x_2$  : seule la continuité en  $x_1$  pose problème, et l'on s'en sort par limite à droite = limite à gauche.  $\square$

L'abus de langage «  $x$  et  $y$  sont reliés » est désormais possible.

**3.2. Définition.** Les composantes connexes de  $C$  sont les classes d'équivalence de  $C$  pour la relation d'équivalence  $\rightsquigarrow$ . On peut donc écrire  $C = \bigcup_{i \in I} C_i$  sous forme d'une union disjointe, où les  $C_i$  sont de la forme  $C_i = \{x \in C; x \rightsquigarrow x_i\}$  (pour un certain  $x_i \in C_i$ , en fait pour *tout*  $x_i \in C_i$ , revoir le cours sur les relations binaires si besoin)

**3.3. Définition.** Une partie  $C$  est dite **connexe par arcs** si  $C$  n'a qu'une seule classe d'équivalence pour  $\rightsquigarrow$ , i.e. si pour tout  $x, y \in C$ , on a  $x \rightsquigarrow y$ .

**3.4. Exemples.**

**3.4.1.** Une partie  $C$  de  $E$  est dite **convexe** si pour tous  $x, y \in C$ , on a  $[x, y] \subset C$ , en notant  $[x, y]$  l'ensemble des points de la forme  $(1-t)x + ty$ , avec  $t \in [0, 1]$ .

**Une partie convexe est toujours convexe par arcs** : en effet, pour  $x_0, x_1$ , l'application  $\varphi(t) = (1-t)x_0 + tx_1$  remplit les trois conditions de la définition.

En particulier, les boules (ouvertes ou fermées) sont convexes (exo!) donc connexes par arcs ; les sous-ev sont convexes donc connexes par arcs ; les intervalles de  $\mathbf{R}$  sont convexes donc connexes par arcs.

Il peut être utile de retenir le résultat suivant :

Une partie  $C$  d'un  $\mathbf{R}$ -ev  $E$  est convexe  $\Leftrightarrow$  pour tout  $n \geq 1$ , tous  $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$  positifs et de somme 1 et tous  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$ ,  $\sum_{i=1}^n t_i x_i$  est dans  $E$ .

Seule  $\Rightarrow$  est bien sûr à prouver, et cela se fait par récurrence, avec initialisation triviale. Pour l'hérédité étant donnés  $(t_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  positifs et de somme 1 et  $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  dans  $E$ , on écrit si  $t_{n+1} \neq 1$  (sinon, l'hr s'applique

de suite)  $\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = (1-t_{n+1}) \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1-t_{n+1}} x_i}_{\in C \text{ par hr}} + t_{n+1} x_{n+1}$ .  $\square$

**3.4.2.** Une partie  $C$  de  $E$  est dite étoilée (par rapport à  $x_0$ ) s'il existe  $x_0 \in C$  tel que  $[x_0, x] \subset C$  pour tout  $x \in C$ . Tout point de  $C$  est connecté à  $x_0$  dans  $C$ , donc  $C$  est en particulier convexe par arcs.

L'ensemble des matrices nilpotentes est étoilée (par rapport à 0), mais pas convexe.

### 3.5. Connexité par arcs et applications.

**Proposition 19.** Soient

- $E, F$  evn,
- $C \subset E$  non vide
- $f : C \rightarrow F$  evn,

Supposons

$\boxed{\text{hyp1}}$   $f$  continue,

$\boxed{\text{hyp2}}$   $C$  convexe par arcs.

Alors  $f(C)$  est convexe par arcs.

**Attention** : C'est faux pour l'image réciproque, prendre  $f(x) = x^2$  et  $C = \{1\} : f^{-1}(C) = \{-1, 1\}$  qui n'est pas convexe par arcs, car pas un intervalle de  $\mathbf{R}$ .

*Démonstration.* Soient  $y_0 = f(x_0)$  et  $y_1 = f(x_1)$  dans  $f(C)$ . Soit  $\varphi$  un chemin continu joignant  $x_0$  et  $x_1$  ;  $f \circ \varphi$  est alors un chemin continu joignant  $y_0$  et  $y_1$ .  $\square$

### 3.6. Parties connexes par arcs de $\mathbf{R}$ .

**Théorème 7.** Soit  $C \subset \mathbf{R}$ . On a équivalence :

(i)  $C$  est convexe par arcs.

(ii)  $C$  est un intervalle

*Démonstration.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Supposons  $C \neq \emptyset$ . Il suffit de montrer que  $C \supset ] \inf C, \sup C[$  (pourquoi?). Soit donc  $\alpha, \beta \in ] \inf C, \sup C[$  avec  $\alpha < \beta$  : par caractérisation des bornes sup. et inf. il existe  $x_0, x_1 \in C$  tels que  $x_0 < \alpha < \beta < x_1$ . Par connexité de  $C$ , il existe  $\varphi : [0, 1] \rightarrow C$  continue telle que  $\varphi(i) = x_i$  pour  $i = 0, 1$ . Par TVI, on a  $\varphi([0, 1]) \supset [x_0, x_1]$ , et donc  $C$  qui contient  $\varphi([0, 1])$  par connexité, contient aussi  $[x_0, x_1]$ . Les points  $x_0, x_1$  étant arbitraires,  $C$  contient  $] \inf C, \sup C[$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Le cours de sup assure que  $C$  est convexe, donc convexe par arcs.  $\square$

**Corollaire (Théorème des valeurs intermédiaires).** Soient

- $E$  evn,
- $C \subset E$  non vide
- $f : C \rightarrow \mathbf{R}$  evn,

Supposons

$\boxed{\text{hyp1}}$   $f$  continue,

**hyp2**  $C$  connexe par arcs.

**hyp3**  $f$  prend au moins une valeur  $> 0$  et une valeur  $< 0$ .

Alors  $f$  s'annule.

*Démonstration.* En effet,  $f(C)$  est une partie connexe de  $\mathbf{R}$ , donc un intervalle, contenant des nombres  $< 0$  et des  $> 0$  :  $f(C)$  contient 0 donc.  $\square$

### 3.6.1. Parties connexes et applications constantes : preuve hors programme.

Ce qui suit est utile pour le calcul différentiel et les caractérisation des applications constantes et différentiables :

**Théorème :** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{R}$ -ev de dimension finie,  $U$  un ouvert de  $E$  connexe par arcs et  $f : U \rightarrow F$  différentiable de différentielle nulle. Alors  $f$  est constante.

Le résultat sera à connaître, mais la preuve est donnée à titre culturel.

**Étape 1 : Les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'une partie  $C$  supposée connexe par arcs sont  $\emptyset$  et  $C$ .** En effet soit  $A \subset C$  à la fois ouverte et fermée. On montre alors que  $\chi_C$ , la fonction indicatrice de  $C$ , est continue (si  $x \in C$  et que  $x_n \rightarrow x$ , on a soit  $x \in A$  et donc  $x_n \in A$  APCR, soit  $x \notin A$  et donc  $x_n \notin A$  APCR). Du coup,  $\chi_C(C)$  est une partie connexe par arcs de  $\mathbf{R}$ , donc un intervalle, donc ne peut être  $\{0, 1\}$  :  $A$  est donc tout ( $= C$ ), ou rien ( $= \emptyset$ ).

**Étape 2 : Locale et globale constance.** Soit  $f : C \rightarrow F$  continue et localement constante, i.e. telle que pour tout  $x \in C$ , il existe un voisinage  $V_x$  de  $x$  tel que  $f$  soit constante sur  $V_x$ . Alors  $f$  est constante sur  $C$ . Fixons pour cela  $x_0 \in C$  et soit  $C_0 = \{x \in C ; f(x) = f(x_0)\}$ . L'hypothèse de locale constance assure que  $C_0$  est ouverte dans  $C$  ; mais  $C_0$  est également fermée dans  $C$  par condition fermée : comme  $C_0$  est non vide, on a  $C = C_0$ .

**Étape 3 : La caractérisation.** Soient  $U$  un ouvert connexe par arcs et  $f : U \rightarrow F$  différentiable de différentielle nulle. Alors  $f$  est constante.

En effet, la restriction de  $f$  à toute  $\tilde{B}(x, r)$  contenue dans  $U$  est de différentielle nulle, donc constante par convexité de  $\tilde{B}(x, r)$  (le cas convexe est traité en cours par AF).

Du coup  $f$  est localement constante sur  $U$ , et continue car différentiable, donc constante sur  $U$ .